ਡਿਸਟੈਂਸ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ ਵਿਭਾਗ
ਪੰਜਾਬੀ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਪਟਿਆਲਾ

ਕਲਾਸ : ਬੀ.ਏ. (ਅਰਥ-ਵਿਗਿਆਨ) ਭਾਗ ਤੀਜਾ   ਸਮੈਸਟਰ ਛੇਵਾਂ

ਪੇਪਰ - ਦੂਜਾ (ਮਾਤਰਾਤਮਕ ਵਿਧੀਆਂ)   ਯੂਨਿਟ : 1

ਮੀਡੀਅਮ : ਪੰਜਾਬੀ

ਪਾਠ ਨੰ.

1.1 ਸਮੂਹ ਅਤੇ ਫਲਨ (**Sets and Function**)

1.2 ਸਾਧਾਰਣ ਅਵਕਲਜ (**Simple Derivatives**)

1.3 ਲਾਗੇਰਿਧਮਿਕ ਅਤੇ ਐਕਸਪੋਨੈਸ਼ੀਅਲ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਵਕਲਨ
(**Differentiation of Logarithmic and Exponential Function**)

1.4 ਇੱਕ ਫਲਨ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ
(**Maxima and Minima of a Function**)

1.5 ਸਾਧਾਰਣ ਅਵਕਲਜਾਂ ਦੀ ਅਰਥ-ਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ
(**Application of Simple Derivatives in Economics**)

1.6 ਮੈਟਰਿਸਜ਼ (**Matrices**)

1.7 ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦਾ ਐਡਜਾਇੰਟ ਅਤੇ ਵਿਪਰੀਤ (**Adjoint and Inverse of Matrix**)

1.8 ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾ ਦਾ ਹੱਲ (**Solution of Simultaneous Equations**)

1.9 ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ (**Measures of Central Tendency**)

1.10 ਖਿਲਾਰ ਦੇ ਮਾਪ (**Measures of Dispersion**)

1.11 ਬਿਖਮਤਾ (**Skewness**)

Department website : www.pbidde.org

ਪਾਠ ਨੰਬਰ : 1.1 | ਲੇਖਿਕਾ : ਡਾ. ਵਿਪਲਾ ਚੋਪੜਾ

ਸਮੂਹ ਅਤੇ ਫਲਨ
(Sets and Functions)

ਰੂਪ ਰੇਖਾ (Structure)

1.0 ਭੂਮਿਕਾ
1.1 ਮੰਤਵ
1.2 ਸਮੂਹ ਦਾ ਮਤਲਬ
1.3 ਸਮੂਹ ਦੇ ਮੈਂਬਰ
1.4 ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਲਿਖਣ ਦੇ ਢੰਗ
1.5 ਸਮੂਹ ਦਾ ਵੈਨ-ਚਿੱਤਰਾ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਗਟਾਉ
1.6 ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ
1.7 ਸਮੂਹ ਦਾ ਸੰਚਾਲਨ
1.8 ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ
1.9 ਫਲਨ
1.10 ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ
1.11 ਅਰਥ ਸ਼ਾਸਤਰ ਦੀਆਂ ਮੁੱਖ ਫਲਨਾਂ
1.12 ਸਾਰਾਂਸ
1.13 ਪ੍ਰਸ਼ਨ
1.14 ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

1.0 ਭੂਮਿਕਾ

ਸਮੂਹ ਦੀ ਥਿਉਰੀ (Set Theory) ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤ ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਆਧੁਨਿਕ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਦਾ ਆਧਾਰ ਹੈ। ਅਰਥ-ਸ਼ਾਸਤਰ ਆਪਣੀਆਂ ਕੁਝ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਜੀਵੇਂ ਕਿ ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ (Set of Commodities), ਕੀਮਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ (Set of Prices) ਆਦਿ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਲਈ ਸਮੂਹ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਪਾਠ ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹ ਅਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

1.1 ਮੰਤਵ

ਇਸ ਪਾਠ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੰਤਵ ਸਮੂਹ ਦਾ ਮਤਲਬ, ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਲਿਖਣ ਦੇ ਢੰਗ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ ਆਦਿ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਫਲਨ ਦਾ ਮਤਲਬ, ਇਸ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ ਅਤੇ ਅਰਥ-ਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਮੁੱਖ ਫਲਨਾਂ ਬਾਰੇ ਵੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਹੈ।

1.2 ਸਮੂਹ ਦਾ ਮਤਲਬ

ਆਪਣੇ ਰੋਜਾਨਾਂ ਦੇ ਜੀਵਨ ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਝੁੰਡ (group), ਟੱਬਰ (family), ਇੱਜੜ (flock) ਆਦਿ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਕਿ ਸਮੂਹ ਦੇ ਭਾਵ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹਨ।

ਪਰੰਤੂ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦਾ ਮਤਲਬ ਵੱਖਰਾ ਹੈ। ਇਕੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਿਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਇਕੱਠ ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਠੀਕ ਅਤੇ ਪਛਾਨਣ ਯੋਗ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। A set is a collection or a group of well-defined and well-distinguished objects or numbers. ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

(i) ਇਕ ਹਫ਼ਤੇ ਵਿਚ ਦਿਨਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

(ii) Economics ਸ਼ਬਦ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਅਖਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

(iii) ਭਾਰਤ ਦੇਸ਼ ਦੇ ਸਾਰੇ ਰਾਜਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

(iv) ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਅੰਕਾਂ (natural numbers) ਦਾ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਵੱਡੇ ਅੱਖਰਾਂ A,B,C, ਆਦਿ ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

1.3 ਸਮੂਹ ਦੇ ਮੈਂਬਰ (Elements of a Set)

ਇਕ ਸਮੂਹ ਵਿਚ ਦੱਸੀਆਂ ਗਈਆਂ ਵਸਤਾਂ ਨੂੰ ਉਸ ਸਮੂਹ ਦੇ ਮੈਂਬਰ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਮੂਹ ਦੇ ਮੈਂਬਰਾਂ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਬਰੈਕਟਸ (Brackets) ਵਿਚ ਵਰਨਣ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਛੋਟੇ ਅੱਖਰਾਂ a, b, c.. ਆਦਿ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵੀ ਮੈਂਬਰ ਦੁਹਰਾਇਆ ਗਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਇਕੋ ਵਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ : A = [2, 4, 6, 8), ਚਾਰ ਅੰਕਾਂ ਮੈਂਬਰਾਂ 2, 4, 6 ਅਤੇ 8 ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸਮੂਹ ਦੇ ਮੈਂਬਰਾਂ ਨੂੰ ਕਾਮਿਆਂ (Commas) ਰਾਹੀਂ ਵੱਖਰਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਾਂ ਫਿਰ ਸਾਰੇ ਮੈਂਬਰਾਂ ਦੀ ਖਾਸਿਅਤ ਇਕ ਵਾਕ ਵਿੱਚ ਬਿਆਨ ਕਰ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਸਮੂਹ ਦੇ ਮੈਂਬਰ 1, 3, 5, 7, 3 ਹੋਣ ਤਾਂ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾਵੇਗਾ :

B = [1, 3, 5, 7]

$\in$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ 'ਦਾ ਮੈਂਬਰ ਹੈ' ਅਤੇ $\notin$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ' ਦਾ ਮੈਂਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

$7 \in B$ ਅਤੇ $8 \notin B$.

1.4 ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਲਿਖਣ ਦੇ ਢੰਗ (Describing a SET)

ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

(i) ਰੋਸਟਰ ਜਾਂ ਸਾਰਨੀਕਰਣ ਦਾ ਤਰੀਕਾ (Roster or tabulation method):

ਇਸ ਤਰੀਕੇ ਵਿੱਚ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੈਂਬਰਾਂ ਨੂੰ ਬਰੇਕਟਾਂ (Brackets) ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ : A = {a, e, i, o, μ)

B = {1, 3, 5, 7, 9}

C = {ECONOMICS}

(ii) ਵਰਣਨਾਤਮਕ ਵਾਕਾਂਸ ਤਰੀਕਾ (Descriptive Phrase Method):

ਇਸ ਤਰੀਕੇ ਰਾਹੀਂ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੈਂਬਰਾਂ ਨੂੰ ਇਕ ਵਾਕਾਂਸ਼ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਵਾਕਾਂਸ਼ ਬਰੈਕਟ ਵਿਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ : A = { 0 ਤੇ 20 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੇ ਸਿਖਮ ਅੰਕ}

B = {Physics ਸ਼ਬਦ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅਖਰ}

(iii) ਸਮੂਹ ਬਣਤਰ ਰੂਪ (Set-builder form):

ਇਸ ਤਰੀਕੇ ਰਾਹੀਂ ਅਸੀਂ ਇਕ ਨਿਯਮ/ਗੁਣ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਸਮੂਹ ਦੇ ਮੈਂਬਰ ਬਣਨ ਲਈ ਹਰ ਅੰਗ ਵਿਚ ਹੋਣਾ ਜਰੂਰੀ ਹੈ।

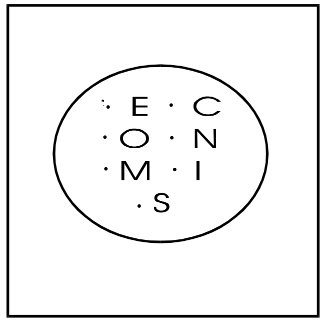
ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ : A = {x:x is a river passing through Punjab}

B = {x:x is even number less than 20)

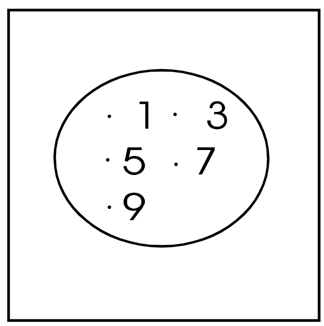
1.5 ਸਮੂਹ ਦਾ ਵੈਨ-ਚਿੱਤਰਾ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਗਟਾਉ (Diagramatic representation of Set)

ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਵੈਨ-ਚਿੱਤਰਾਂ (Venn-diagrames) ਰਾਹੀਂ ਵੀ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਨ ਦਾ ਗਰਾਫਿਕ (Graphic) ਤਰੀਕਾ ਹੈ। ਵੈਨ-ਚਿੱਤਰ ਗੋਲ ਦਾਇਰੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੈਂਬਰ ਨੂੰ ਇਕ ਬਿੰਦੂ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ ਜੇ A = {ECONOMICS} ਦੇ ਸਾਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ}

ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਵੈਨ-ਚਿੱਤਰ ਹੋਵੇਗਾ :



B = [Set of odd numbers less then 10]
ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਵੈਨ-ਚਿੱਤਰ ਹੋਵੇਗਾ :



1.6 ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ (Types of Sets)

ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਕਈ ਕਿਸਮਾਂ ਹਨ :

(a) ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ (Null Set/Empty Set)

ਜਿਸ ਸਮੂਹ ਵਿਚ ਕੋਈ ਵੀ ਮੈਂਬਰ ਨਾ ਹੋਵੇ, ਉਸ ਨੂੰ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ϕ (Phai - ਫਾਈ) ਜਾਂ { } ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ : A = [x : x ਚਾਰ ਅੱਖਾਂ ਵਾਲਾ ਆਦਮੀ]
B = {y : y - 1 = 0 and y^2 - 6}

(b) ਇਕਾਈ ਸਮੂਹ (Unit or Singleton Set)

ਜਿਸ ਸਮੂਹ ਦਾ ਇਕ ਹੀ ਮੈਂਬਰ ਹੋਵੇ, ਉਸ ਨੂੰ ਇਕਾਈ ਸਮੂਹ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ : A = { 10 }
B = { x : x is the moon}
C = {x : x is the President of India}

(c) ਪਰਿਮਤ ਸਮੂਹ (Finite Set)

ਪਰਿਮਤ ਸਮੂਹ ਵਿਚ ਮੈਂਬਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਗਿਣਨਯੋਗ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ : A = {2, 4, 6, 8}

B = { Sutlej, Beas, Ravi}

C = (x : x is an integer - 1 $\leq$ x < 6)

(d) ਅਨੰਤ ਸਮੂਹ (Infinite Set)

ਜਿਸ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਮੈਂਬਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨਾ ਹੋ ਸਕੇ, ਉਸ ਨੂੰ ਅਨੰਤ ਸਮੂਹ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ : B = {x : x is an odd integer}

C = {x : x is a star in the sky}

(e) ਵਿਸ਼ਵ ਸਮੂਹ (Universal Set)

ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ ਸਮੂਹ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ, ਕਿਸੇ ਇਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸਮੂਹ ਦੇ ਉਪ-ਸਮੂਹ (Sub-Set) ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਵਿਸ਼ਵ ਸਮੂਹ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ 'U' ਜਾਂ 'E' ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ : (i) ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇਕ ਡਾਈਸ (dice) ਨੂੰ ਸੁੱਟਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਵਿਸ਼ਵ ਸਮੂਹ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੋਵੇਗਾ U = {1, 2, 3, 4, 5, 6} (ਕਿਉਂਕਿ ਡਾਈਸ ਦੇ 6 ਪਾਸੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ)

(ii) ਮੰਨ ਲਵੋ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਤਿੰਨ ਸਮੂਹ A, B, C ਹਨ,

A = (1, 3, 5)

B = (a, b, c)

C = (b, p, q. r)

ਤਾਂ U = (1, 3, 5, a, b, c, p, q, r)

ਇੱਥੇ ਸਮੂਹ A ਨੂੰ ਸਮੂਹ U ਦਾ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ B ਅਤੇ C ਵੀ U ਦੇ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਹਨ। ਅਰਥਾਤ U ਵਿਸ਼ਵ-ਸਮੂਹ ਹੈ। ਅਤੇ A, B, C ਇਸ ਦੇ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਹਨ।

$A \subseteq U$

$B \subseteq U$

$C \subseteq U$

ਜਿੱਥੇ '$\subseteq$' ਚਿੰਨ੍ਹ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਵਿਸ਼ਵ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਵੈਨ-ਚਿਤਰ ਰਾਹੀਂ Rectangle ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(f) ਸ਼ਕਤੀ ਸਮੂਹ (Power Set)

ਜੇਕਰ ਇਕ ਸਮੂਹ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਉਪ-ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰਕੇ ਇਕ ਨਵਾਂ ਸਮੂਹ ਬਣਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਇਸ ਨਵੇਂ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਸ਼ਕਤੀ ਸਮੂਹ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਚਿੰਨ P(A) ਹੈ ਜਿਥੇ A ਇਕ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

(i) ਜੇ A = (a, b)

ਇਸ ਦੇ ਚਾਰ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਹਨ :

ϕ, (a), (b), (a, b)

ਤਾਂ A ਦਾ ਸ਼ਕਤੀ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ

P (A) = (ϕ, (a), (b), (a, b) }

(ii) ਜੇ A = {4, 5, 6)

ਤਾਂ P (A) = {ϕ, (4), (5), (6), (4,5), (5,6), (4,6), (4,5,6)}

(g) ਸਮਾਨ ਸਮੂਹ (Equal/Identical Sets)

ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਸਮੂਹ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਦੋਵਾਂ ਦੇ ਮੈਂਬਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤੇ ਦੋਵਾਂ ਦੇ ਮੈਂਬਰ ਸਮਾਣ ਹੋਣ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿਚ ਜੇਕਰ ਇਕ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੈਂਬਰ ਹਨ ਤੇ ਦੂਜੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੈਂਬਰ ਪਹਿਲੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਵੀ ਮੈਂਬਰ ਹਨ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਸਮੂਹ ਬਰਾਬਰ ਹਨ। ਸਮਾਨ ਸਮੂਹਾ ਨੂੰ = ਚਿੰਨ ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ

ਜਾਂ $A \subseteq B$ ਅਤੇ $B \subseteq A$

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

(i) ਜੇਕਰ A = {2, 4, 6, 8}

ਅਤੇ B = {6, 8, 4, 2}

ਤਾਂ A = B

(ii) A = {x : x is a letter of the word year)

B = [y, e, a, r]

ਤਾਂ A = B

(iii) ਜੇਕਰ A = (2)

ਅਤੇ B = (x:x-2 = 0)

ਤਾਂ A = B

(h) ਤੁਲ ਸਮੂਹ (Equivalent Sets)

ਜਦੋਂ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਮੈਂਬਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਜਿਹੇ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਤੁਲ ਸਮੂਹ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

ਜੇ A = {a, e, i, o, μ)

B = {1, 2, 3, 4, 5}

ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਤੁਲ ਸਮੂਹ ਹਨ। ਤੁਲ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ $\longleftrightarrow$ ਜਾਂ ~ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

i.e. A~B ਜਾਂ $A \longleftrightarrow B$.

(i) ਅਸੰਬੰਧਤ ਸਮੂਹ (Mutually Exclusive or Disjoint Sets)

ਜਦੋਂ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਮੈਂਬਰ ਸਾਂਝਾ ਨਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਅਸੰਬੰਧਤ ਸਮੂਹ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

(i) A = (ਰਾਮ, ਸ਼ਾਮ)

B = (ਮੀਰਾ, ਸੁਨੀਤਾ)

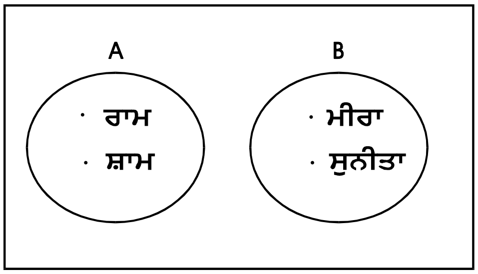
ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਅਸੰਬੰਧਤ ਸਮੂਹ ਹਨ।

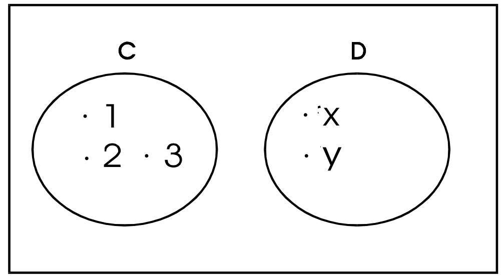
(ii) C = (1, 2, 3)

D = (x, y)

A ਅਤੇ B ਅਸੰਬੰਧਤ ਸਮੂਹ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਮੈਂਬਰ ਸਾਂਝਾ ਨਹੀਂ।

ਵੈਨ-ਚਿੱਤਰ ਰਾਹੀਂ





ਅਸੰਬੰਧਤ ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਛੇਦਨ (intersection) ਖਾਲੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$A \cap B = \phi, \; C \cap D = \phi$

ਜਿਥੇ ਚਿੰਨ੍ਹ $\cap$ ਪ੍ਰਤਿਛੇਦਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

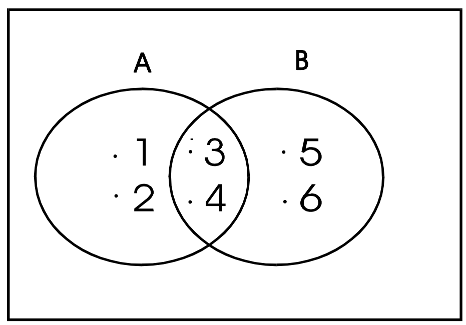
(j) ਪਰਸਪਰ ਵਿਆਪੀ (Overlapping Sets)

ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਪਰਸਪਰ ਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਮੈਂਬਰ ਸਮਾਨ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

A = (1, 2, 3, 4)

B = (3, 4, 5, 6)



ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਪਰਸਪਰ ਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੋ ਮੈਂਬਰ 3 ਅਤੇ 4 ਸਮਾਨ ਹਨ।

$A \cap B = (3, 4)$

1.7 ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਸੰਚਾਲਨ (Set Operations)

ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਸੰਚਾਲਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

(A) ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਪੂਰਕ ਸਮੂਹ (Complement of a Set)

ਜੇਕਰ ਸਮੂਹ A ਵਿਸ਼ਵ ਸਮੂਹ E ਦਾ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਹੈ ਤਦ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦਾ ਪੂਰਕ ਸਮੂਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਪੂਰਕ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਉਹ ਸਾਰੇ ਮੈਂਬਰ ਹੋਣਗੇ ਜਿਹੜੇ ਸਮੂਹ A ਵਿਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਪੂਰਕ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$A^1 \text{ or } A^c = \{x : x \notin A\}$ ਜਾਂ $A^1 \text{ or } A^c = \{x : x \in E, x \notin A\}$

ਪੂਰਕ ਸਮੂਹ ਦੇ ਕੁਝ ਨਿਯਮ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ :

(i) $U^1 = \phi$

ਵਿਸ਼ਵ ਸਮੂਹ ਦਾ ਪੂਰਕ ਸਮੂਹ ਇਕ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ।

(ii) $\phi^1 = U$

ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਪੂਰਕ ਵਿਸ਼ਵ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ।

(iii) $A \cup A^1 = E$

(iv) $A \cap A^1 = \phi$

(v) $(A^1)^1 = A$

(vi) $(A \cup B)^1 = A^1 \cap B^1$

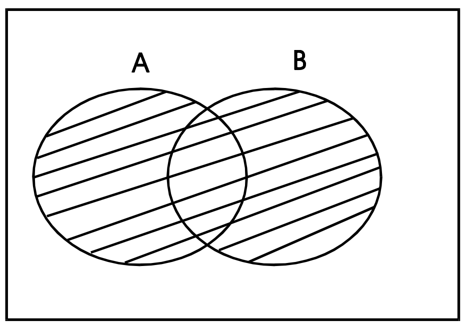
(vii) $(A \cap B)^1 = A^1 \cup B^1$

(B) ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਸੰਘ (Union of Set)

ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਸੰਘ ਇਕ ਨਵੇਂ ਸਮੂਹ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਜਾਂ ਸਮੂਹ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੈਂਬਰ, ਜਾਂ ਸਮੂਹ B ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੈਂਬਰ (ਜਾਂ ਦੋਨਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੈਂਬਰ) ਸ਼ਾਮਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਸੰਕੇਤਾਂ ਰਾਹੀਂ :

$A \cup B = [x : x \in A \text{ or } x \in B \text{ or } x \in \text{both } A \text{ and } B]$

ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸੰਘ ਨੂੰ ਵੈਨ-ਚਿੱਤਰ ਰਾਹੀਂ ਵੀ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



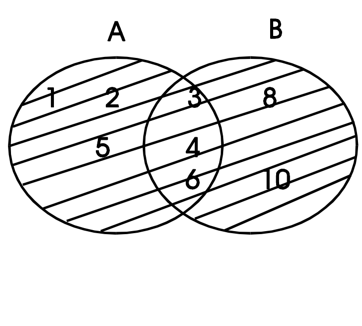
$A \cup B$ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਸ਼ੇਡ ਨਾਲ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

ਜੇ $A = [1,2,3,4,5,6]$

$B = [3,4,6,8,10]$

ਤਾਂ $A \cup B = [1,2,3,4,5,6,8,10]$



$A \cup B$ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਸ਼ੇਡ ਨਾਲ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A \cup A = A$

ਹੱਲ: ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ਇਕ ਸਮੂਹ A ਦਾ A ਨਾਲ ਹੀ ਸੰਘ ਸਮੂਹ A ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਸਾਨੂੰ (i) ਅਤੇ (ii) ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀ ਲੋੜ ਪਵੇਗੀ :

(i) $A \cup A \subset A$ (ii) $A \subset A \cup A$

(i) ਹੁਣ $A \cup A \subset A$ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ :

ਕੋਈ $x \in A \cup A \longrightarrow x \in A \text{ or } x \in A$

$\Rightarrow x \in A$

$= A \cup A \subset A$ I

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $A \subset A \cup A$ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ

ਕੋਈ $y \in A \rightarrow y \in A \text{ or } y \in A \cup A$

$\Rightarrow y \in A \cup A$

$= A \subset A \cup A$ II

I ਅਤੇ II ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

$A = A \cup A$, or $A \cup A = A$

ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸੰਘ ਦਾ ਆਈਡੈਮਪੋਟੈਂਟ ਨਿਯਮ (Idempotent law of union of sets) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੂਹ $(A \cup A)$ ਦਾ ਹਰ ਮੈਂਬਰ ਸਮੂਹ A ਦਾ ਮੈਂਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮੂਹ A ਦਾ ਹਰ ਮੈਂਬਰ ਸਮੂਹ $A \cup A$ ਦਾ ਵੀ ਮੈਂਬਰ ਹੈ। ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸੰਘ ਦੇ ਦੂਜੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਨਿਯਮ ਹਨ :

(i) ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸੰਘ ਦਾ ਕਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਿਯਮ (Commutative Law of Union of two sets)

ਇਸ ਨਿਯਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਜੇ A ਅਤੇ B ਦੋ ਸਮੂਹ ਹਨ, ਤਾਂ

$A \cup B = B \cup A$

ਹੁਣ $A \cup B = [x \in \cup : x \in A \text{ or } x \in B]$

$= [x \in \cup : x \in B \text{ or } x \in A] = B \cup A$

(ii) ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸੰਘ ਦਾ ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਦਾ ਨਿਯਮ (Associative Law of Union of three sets)

ਇਸ ਨਿਯਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(2) ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਛੇਦਨ (Intersection of Sets)

A ਅਤੇ B ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਛੇਦਨ ਇਕ ਅਜਿਹੇ ਨਵਾਂ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦੇ ਮੈਂਬਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਦੋਹਾਂ ਦੇ ਮੈਂਬਰਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਰਥਾਤ ਨਵੇਂ ਸਮੂਹ ਦੇ ਮੈਂਬਰ ਦੋਨਾਂ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਮੈਂਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਸੰਕੇਤਾਂ ਰਾਹੀਂ

$A \cup B = [x : x \in A \text{ ਅਤੇ } x \in B]$

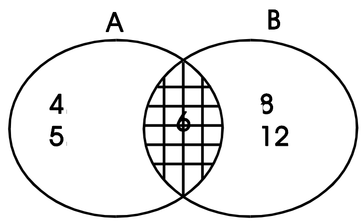
ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

ਜੇਕਰ $A = (4, 5, 6)$

$B = (6, 8, 12)$

ਤਾਂ $A \cup B = (6)$

ਸੰਕੇਤਾਂ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਤਿਛੇਦਨ ਨੂੰ ਵੈਨ-ਚਿੱਤਰਾਂ ਰਾਹੀਂ ਵੀ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ # ਸ਼ੇਡ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਖੇਤਰ A ਅਤੇ B ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਛੇਦਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਛੇਦਨ ਦਾ ਕਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਿਯਮ (Commutative Law Intersection of Sets)

ਇਸ ਦੇ ਨਿਯਮ ਅਨੁਸਾਰ $A \cap B = B \cap A$

ਹੁਣ $A \cap B = [x \in \cup : x \in A \text{ and } x \in B]$

$= [x \in \cup : x \in B \text{ and } x \in A] = B \cap A$

ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਛੇਦਨ ਦਾ ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਦਾ ਨਿਯਮ (Associative Law of Intersection of Sets)

ਇਸ ਦੇ ਨਿਯਮ ਅਨੁਸਾਰ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

ਵਿਤਰਣਾਤਮਿਕ ਨਿਯਮ (Distributive Law)

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ਹੱਲ: $A \cap (B \cup C) = [x \in \cup : x \in A \text{ and } x \in B \cup C]$

$= [x \in \cup : x \in A \text{ and } (x \in B \text{ or } x \in C)]$

$= [x \in \cup : (x \in A \text{ and } x \in B) \text{ or } (x \in A \text{ and } x \in C)]$

$= [x \in \cup : x \in (A \cap B) \text{ or } x \in (A \cap C)]$

$= (A \cup B) \cup (A \cup C)$

(b) ਨੂੰ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਆਪ ਹੱਲ ਕਰਨ।

1.8 ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ (Difference of Sets)

ਦੋ ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਦਾ ਅੰਤਰ ਇਕ ਅਜਿਹਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਿਸ ਦੇ ਮੈਂਬਰ A ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਨ ਪਰ ਜੋ ਸਮੂਹ B ਦੇ ਮੈਂਬਰ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਅਰਥਾਤ ਇਸ ਵਿੱਚ ਜੋ ਮੈਂਬਰ A ਅਤੇ B ਦੋਹਾਂ ਦੇ ਮੈਂਬਰ ਹਨ, ਸ਼ਾਮਲ ਨਹੀਂ ਕੀਤੇ ਜਾਣਗੇ।

ਸੰਕੇਤਾਂ ਰਾਹੀਂ $\therefore A - B = (x : x \in A, x \notin B)$

ਅਤੇ $B - A = (x : x \in B, x \notin A)$

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

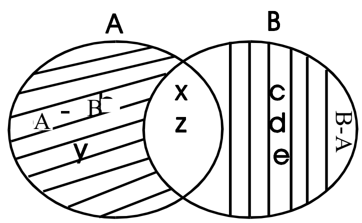
ਜੇਕਰ A = (a, b, x, y, z)

B = (c, d, e, x, z)

A-B = (a, b, y)

B-A = (c, d, e)

ਵੈਨ-ਚਿੱਤਰਾਂ ਰਾਹੀਂ



ਸ਼ੈਡ (=) ਕੀਤਾ ਖੇਤਰ = A-B

ਸ਼ੈਡ (III) ਕੀਤਾ ਖੇਤਰ = B-A

A- B # B-A

ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਸੰਤੁਲਿਤ ਅੰਤਰ (Symmtric difference between two sets)

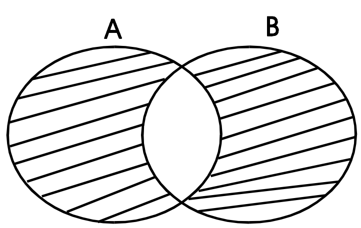
The symmetric difference of two sets A, B is the set of those elements which are either in A or in B but not in both A, B.

ਦੋ ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਦਾ ਸੰਤੁਲਿਤ ਅੰਤਰ ਇਕ ਅਜਿਹਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਿਸ ਦੇ ਮੈਂਬਰ ਜਾਂ ਤਾਂ A ਦੇ ਮੈਂਬਰ ਹਨ, ਜਾਂ ਸਮੂਹ B ਦੇ ਮੈਂਬਰ ਹਨ, ਪਰੰਤੂ ਦੋਹਾਂ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਮੈਂਬਰ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਸੰਕੇਤਾਂ ਰਾਹੀਂ

$A \Delta B = [x : x \in A \cup B \text{ and } x \notin A \cap B]$

ਜਾਂ $A \Delta B = [A \cup B] - [A \cap B]$

ਵੈਣ ਚਿੱਤਰ ਰਾਹੀਂ



ਸ਼ੇਡ (=) ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਖੇਤਰ A ਅਤੇ B ਦੇ ਸੰਤੁਲਿਤ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

ਜੇਕਰ A = {a, b, c, d, e, f} ਅਤੇ B = {1, 2, 3, c, f}

$A \nabla B = (a, b, d, e, 1, 2, 3)$

1.9 ਫਲਨ (Function)

ਸੰਬੰਧ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਫਲਨ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਬਾਰੇ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ A ਅਤੇ B ਦੋ ਸਮੂਹ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸੇ ਨਿਯਮ 'f ਅਨੁਸਾਰ ਸਮੂਹ A ਦਾ ਹਰ ਇਕ ਮੈਂਬਰ x ਸਮੂਹ ਦੇ ਕਿਸੇ ਅਦੁੱਤੀ (unique) ਮੈਂਬਰ y ਨਾਲ ਸੰਬੰਧ ਕਰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਫਲਨ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ 'f ਅੱਖਰ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਨ y = f (x), ਇਥੇ Y ਸਮੂਹ B ਦਾ ਮੈਂਬਰ ਹੈ, X ਅਤੇ A ਦਾ ਮੈਂਬਰ ਹੈ ਅਤੇ 'f x ਅਤੇ y ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਦਾ ਨਿਯਮ ਹੈ।

$f : X \rightarrow Y, x \in X, f(x) = y, y \in Y$

ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੋਵੇਗੀ :

"Suppose that to each element in a Set A, there is assigned, by some manner or other, a unique element of a set B, We call such assignment a function. Let us f denote these assignments, then we write : f = $A \rightarrow B$

which reads 'f' is a function of A into B."

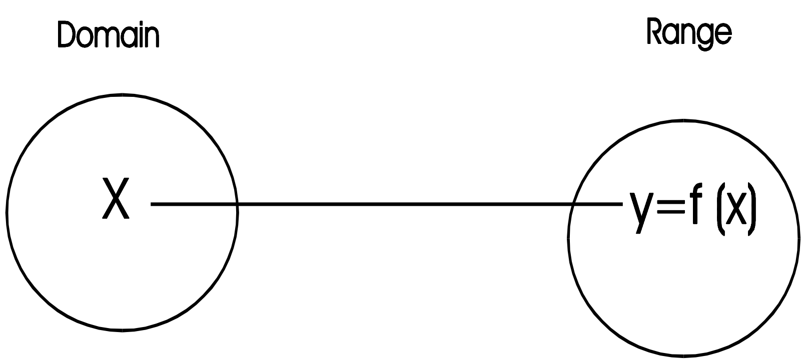
ਸਮੂਹ A ਨੂੰ ਫਲਨ f ਦਾ domain ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ B ਨੂੰ f ਦਾ Co-domain.

ਜੇਕਰ $a \in A$ ਤਾਂ B ਵਿਚ ਜਿਹੜੇ element ਲਈ assign ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਉਸ ਨੂੰ image ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ f(a) ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਹ ਜਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ B ਦਾ ਹਰ ਇਕ element A ਦੇ ਕਿਸੇ element ਦਾ image ਹੋਵੇ। f ਦੀ ਰੇਂਜ (range) B ਦੇ ਉਨ੍ਹਾਂ elements ਦੀ ਹੋਵੇਗੀ ਜੋ ਕਿ A ਦੀ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇਕ element ਦੀ image ਹੋਵੇ। ਰੇਂਜ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

Range of $f : A \rightarrow B$ is f (A)

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ f(A), B ਦਾ ਇਕ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਹੈ।



ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ : ਜੇ P ਕੀਮਤ ਹੈ ਤੇ X ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਹੈ ਤਾਂ ਪੂਰਤੀ ਫਲਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$x = f(P)$

ਅਰਥਾਤ ਪੂਰਤੀ ਕੀਮਤ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਜੇ C ਉਪਭੋਗ ਹੈ ਤੇ Y ਆਮਦਨ ਹੈ ਤਾਂ ਉਪਭੋਗ ਫਲਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$c = f(Y)$

ਅਰਥਾਤ ਉਪਭੋਗ ਆਮਦਨ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੀ ਹੈ।

1.10 ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਮੁੱਖ ਕਿਸਮਾਂ (Classification of functions)

ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਮੁੱਖ ਕਿਸਮਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਹਨ :

(i) ਸਥਿਰ/ਅਚਰ ਫਲਨ (Constant function)

ਜਿਸ ਫਲਨ ਦੀ ਰੇਂਜ ਵਿਚ ਸਿਰਫ ਇਕ ਹੀ ਮੈਂਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਉਸ ਨੂੰ ਸਥਿਰ/ਅਚਰ ਫਲਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

$$y = \lambda$$

ਜਾਂ $f(x) = \lambda$ ਜਿੱਥੇ λ ਇਕ ਅਚਰ (constant) ਹੈ।

(ii) ਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ (Explicit Function)

ਜਦੋਂ ਪ੍ਰਤੰਤਰ ਚਰ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿੱਧੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

$$y = (3x + 5)^4$$

(iii) ਅਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ (Implicit function)

ਜਦੋਂ ਪ੍ਰਤੰਤਰ ਚਰ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿੱਧੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ ਤੋਂ ਪਤਾ ਨਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਅਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

(i) $ax^2 + by^2 + cx + dy + C = O$

(ii) $x^4 - 3yx^2 + 2xy^2 - 25 = O$

(iv) ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ-ਫਲਨ (Real-Valued Function)

ਜਿਸ ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ ਅਤੇ ਰੇਂਜ ਵਾਸਤਵਿਕ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਹੋਣ, ਉਸ ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਖ ਫਲਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(v) ਇੱਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ (Single-valued function)

ਜਿਸ ਫਲਨ ਵਿਚ ਸੁਤੰਤਰ ਦਰ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿਚ ਪ੍ਰਤੰਤਰ ਦਰ ਦਾ ਸਿਰਫ ਇਕ ਹੀ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇ, ਉਸ ਨੂੰ ਇਕ-ਮੁੱਲ, ਫਲਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

(i) $y = 4x+5$

(ii) $y = \frac{3x+4}{6x+7}$

(vi) ਬਹੁ-ਮੁੱਲ ਫਲਨ (Multi-valued/Multi form function)

ਅਜਿਹਾ ਫਲਨ ਜਿਸ ਵਿਚ ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿਚ ਪ੍ਰਤੰਤਰ ਚਰ ਦੇ ਇਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁੱਲ ਹੋਣ ਤਾਂ ਅਜਿਹੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਬਹੁ-ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

(i) $y = x^2+3x-5$ (Quadratic function)

(ii) $y = \sqrt{x} + 5$ (ii) $y = \sqrt{x}$

(vii) ਇਕਘਾਤੀ ਫਲਨ (Linear function)

ਜਿਸ ਫਲਨ ਦੀ ਘਾਤ (degree) ਇਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਉਸ ਨੂੰ ਇਕਘਾਤੀ ਫਲਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

$$y = ax + b$$

(viii) ਵੱਧਦੇ ਫਲਨ (Increasing function)

ਜਦੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿਚ ਵਾਧਾ ਹੋਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਤੰਤਰ ਚਰ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿਚ ਵੀ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਦ ਅਜਿਹੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਵੱਧਦਾ ਫਲਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

$$y = x^2+4x+5$$

ਜਦੋਂ $x = 1, y = (1)^2 + 4 (1) + 5 = 10$

$x = 2, y = (2)^2 + 4 (2) + 5 = 17$

$x = 3, y = (3)^2 + 4 (3) + 5 = 26$

(ix) ਘੱਟਦੇ ਫਲਨ (Decreasing function)

ਜਦੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿਚ ਘਾਟਾ ਹੋਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਤੰਤਰ ਚਰ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿਚ ਵੀ ਘਾਟਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਦ ਅਜਿਹੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਘੱਟਦਾ ਫਲਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

$$y = \frac{20}{x+4}$$

ਜਦੋਂ $x = 1, y = \frac{20}{5} = 4$

ਜਦੋਂ $x = 2, y = \frac{20}{6} = 3.33$

ਜਦੋਂ $x = 3, y = \frac{20}{7} = 2.85$

ਜਦੋਂ $x = 4, y = \frac{20}{8} = 2.5$

(x) ਉਲਟ ਫਲਨ (Inverse function)

ਜੇਕਰ $y = f(x)$ ਕੋਈ ਇਕ ਫਲਨ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਤੋਂ ਇਕ ਹੋਰ ਫਲਨ $x=\phi(y)$ ਕੱਢਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦੋਨੋਂ ਫਲਨਾਂ ਇਕ ਦੂਜੇ ਦੀ ਉਲਟ ਫਲਨ ਕਹਿਲਾਏਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

$y = 9x + 6$ ਅਤੇ $x = \frac{y-6}{9}$

(i) $y = \frac{5x+3}{2x+9}$ ਅਤੇ $x = \frac{3-9y}{2y-5}$ ਇਕ ਦੂਜੇ ਦੀ ਉਲਨ ਫਲਨਾਂ ਹਨ।

1.11 ਅਰਥ ਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਕੁਝ ਮੁੱਖ ਫਲਨਾਂ (Main functions used in Economics)

ਅਰਥ ਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਮੁੱਖ ਫਲਨਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

(i) ਮੰਗ ਫਲਨ (Demand function)

ਮੰਨ ਲਉ q ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦੀ ਮੰਗ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਹੈ ਅਤੇ P ਕੀਮਤ ਹੈ ਤਾਂ ਮੰਗ ਫਲਨ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$q = f(P)$

ਮੰਗ ਫਲਨ ਮੰਗ ਦੇ ਨਿਯਮ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਮੰਗ ਫਲਨ ਇਕ ਘੱਟਦਾ ਫਲਨ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੋਣ ਨਾਲ ਮੰਗ ਵਿਚ ਕਮੀ ਆਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਮੰਗ ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਨ (Slope) ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) ਪੂਰਤੀ ਫਲਨ (Supply function)

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $q=f(P)$ ਪੂਰਤੀ ਫਲਨ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ q ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਵਸਤੂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਮੰਨ ਲਈਏ। ਕਿਉਂਕਿ ਕੀਮਤ ਵਿਚ ਵਾਧੇ ਨਾਲ ਪੂਰਤੀ ਵਿੱਚ ਵੀ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਪੂਰਤੀ ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਨ ਸਾਕਾਰਾਤਮਕ (Positive) ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iii) ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ (Production Function)

ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਉਪਜ ਅਤੇ ਸਾਧਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ Q ਉਤਪਾਦਨ ਹੈ, ਪੂੰਜੀ (k) ਅਤੇ ਮਜ਼ਦੂਰ (L) ਸਾਧਨ ਹਨ ਤਾਂ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$Q = f(K, L)$

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$ ਜਿਥੇ α, β constant ਹਨ

(iv) ਆਮਦਨ ਫਲਨ (Revenue function)

ਆਮਦਨ ਵਸਤੂ ਦੀ ਵਿਕਰੀ ਅਤੇ ਕੀਮਤ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ R = ਆਮਦਨ, P = ਕੀਮਤ ਅਤੇ X = ਵਸਤੂ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਤਾਂ ਆਮਦਨ ਫਲਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$R = f(P, X)$ ਜਾਂ $R = P, x$

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

ਜੇਕਰ $P = 2x-3$ ਤਾਂ

ਆਮਦਨ ਫਲਨ (Revenue function) = Px

$= (2x-3)\,x = 2x^2-3x$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਲਾਗਤ ਫਲਨ (Cost function)

ਜੇਕਰ ਇਕ ਵਸਤੂ X ਦੀ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ C ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ ਫਲਨ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਵੇਗਾ:

$C = f(X)$

ਔਸਤ ਲਾਗਤ ਫਲਨ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$AC \text{ ਅਰਥਾਤ ਔਸਤ ਲਾਗਤ} = \frac{\text{ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ}}{X} = \frac{C}{X}$$

1.12 ਸਾਰਾਂਸ਼

ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹ ਅਤੇ ਫਲਨਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਸਮੂਹ ਦਾ ਮਤਲਬ, ਲਿਖਣ ਦੇ ਢੰਗ, ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ ਅਤੇ ਸੰਚਾਲਨ ਉਦਾਹਰਣ ਸਹਿਤ ਦੱਸੇ ਗਏ ਹਨ। ਫਲਨ, ਫਲਨ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ, ਅਰਥ-

ਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਕੁਝ ਮੁੱਖ ਫਲਨਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਵੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

1.13 ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਛੋਟੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ।

(ii) ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਲਿਖਣ ਦੇ ਢੰਗ ਦੱਸੋ।

(iii) ਸਮਾਨ ਸਮੂਹ ਅਤੇ ਤੁਲ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਫਰਕ ਦਸੋ।

(iv) ਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ ਅਤੇ ਅਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ ਵਿੱਚ ਫਰਕ ਦਸੋ।

(v) ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ।

ਵੱਡੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) ਜੇਕਰ A = (1, 2, 3, 4, 5)

B = (2, 4, 6, 7, 9)

C = (3, 5, 6, 7, 8)

ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ (a) $A \cup (B \cup C) = (B \cup C) \cup A$

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ਅਤੇ $\widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ii) ਜੇਕਰ $\cup = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$

A = (1, 2, 3, 4) B = (3, 5, 8, 10), Verify that

(i) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(ii) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

(iii) $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

(iii) Define a set; what is meant by empty set ? Find the union and intersection of the following sets.

(i) $S_1 = [a, b, c], S_2 = \{1,2,\}$

(ii) $S_1 = [a, b, c], S_2 = \{a, b, 1\}$

(iv) State and Prove Associative Law for the union and Intersection of Sets.

(v) ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਸੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀਆਂ ਮੁੱਖ ਕਿਸਮਾਂ ਬਾਰੇ ਵੀ ਦਸੋ।

1.14 ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

1. Aggarwal and Joshi : Mathematics for Students of Economics.
2. Bhardwaj and Sabharwal: Mathematics for Students of Economics.
3. Aggarwal, Bhardwaj, Bains : Quantitative Methods (Pbi. Med.).
and Inder Kurmar
4. Balwant Kandoi : Mathematics for Business and Economics with Applications.

ਪਾਠ ਨੰ: 1.2 — ਲੇਖਿਕਾ : ਡਾ. ਵਿਪਲਾ ਚੋਪੜਾ

ਸਾਧਾਰਣ ਅਵਕਲਜ
(Simple Derivatives)

ਰੂਪ-ਰੇਖਾ (Structure)

2.0 ਭੂਮਿਕਾ
2.1 ਮੰਤਵ
2.2 ਅਵਕਲਜ ਗੁਣਾਂਕ
 2.2.1 ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਅਵਕਲਜ
 2.2.2 ਆਦਿ ਤੋਂ ਅਵਕਲਜ
2.3 ਅਵਕਲਨ ਦੇ ਕੁਝ ਨਿਯਮ
 2.3.1 ਸਾਧਾਰਣ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਯਮ
 2.3.2 ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਜਾਂ ਘਟਾਓ ਦਾ ਅਵਕਲਨ
 2.3.3 ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਅਵਕਲਨ
 2.3.4 ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਅਵਕਲਨ
2.4 ਕੁਝ ਹੋਰ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਵਕਲਨ
2.5 ਸਾਰਾਂਸ਼
2.6 ਪ੍ਰਸ਼ਨ
2.7 ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

2.0 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਿਛਲੇ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਫਲਨਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਸੀ ਅਤੇ ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਾਧਾਰਣ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਵਕਲਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਬਾਰੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

2.1 ਮੰਤਵ

ਇਸ ਪਾਠ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੰਤਵ ਸਾਧਾਰਣ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਵਕਲਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਅਤੇ ਅਵਕਲਨ ਦੇ ਕੁਝ ਨਿਯਮਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਹੈ।

2.2 ਅਵਕਲਨ ਗੁਣਾਂਕ (Differential Coefficient)

ਮੰਨ ਲਉ $y = f(x)$ ਇਕ ਫਲਨ ਹੈ। ਜਿਥੇ x ਸੁਤੰਤਰ ਅਤੇ y ਪ੍ਰਤੰਤਰ ਚਰ ਹਨ। ਇਸ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਅਵਕਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਗਿਆਤ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਅਵਕਲਨ (Differentiation) ਆਖਦੇ ਹਨ।

2.2.1 ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਅਵਕਲਜ

ਮੰਨ ਲਉ $y = f(x)$ .... (i)

ਮੰਨ ਲਉ ਫਲਨ (i) ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ x ਚਰ ਦੇ ਮਾਨ ਵਿੱਚ ਅਲਪਵ੍ਰਿਧੀ (Small increment) Δx ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ। ਕਿਉਂਕਿ y ਦਾ ਮਾਨ x ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ y ਦੇ ਮਾਨ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੰਗਤ ਵ੍ਰਿਧੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਮੰਨ ਲਉ y ਦੇ ਮਾਨ ਵਿੱਚ ਸੰਗਤ ਵ੍ਰਿਧੀ Δy ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

$\therefore y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ .... (ii)

ਸਮੀਕਰਣ (ii) ਵਿੱਚੋਂ ਸਮੀਕਰਣ (i) ਨੂੰ ਘਟਾਉਣ ਤੇ

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .... (iii)

ਹੁਣ ਦੋਵਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ Δx ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ ਤੇ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (\Delta x \neq 0)$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ਨੂੰ ਵ੍ਰਿਧੀ ਅਨੁਪਾਤ (Incremental ratio) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇ $\underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$ ਹੋਂਦ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਗਿਆਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕੇ ਤਾਂ ਫਲਨ f (x) ਅਵਕਲਨੀਯ (differentiable) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$\underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ਨੂੰ $\frac{dy}{dx}$ ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$\therefore \frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ਨੂੰ ਫਲਨ f (x) ਦਾ ਅਵਕਲਨ ਗੁਣਾਂਕ (differential coefficient) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਫਲਨ f (x) ਦਾ x = b ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਅਵਕਲਜ (Derivative)

ਮੰਨ ਲਉ f (x), x ਦਾ ਕੋਈ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ $\underset{\Delta x \to b}{Lt} \frac{f(b+x) - f(b)}{x}$ ਨੂੰ ਫਲਨ f (x) ਦਾ ਬਿੰਦੂ x = b ਤੇ ਅਵਕਲਜ ਆਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ f (b) ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਨੋਟ : $\frac{dy}{dx}$ ਦਾ ਅਰਥ $dy \div dx$ ਨਹੀਂ ਸਗੋਂ ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ $\frac{d}{dx}(y)$ ਹੈ। $\frac{d}{dx}$ ਤਾਂ ਅਵਕਲਜ ਦਾ ਸੂਚਕ (Symbol) ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1: ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = x^2 + 2x + 2$ ਅਵਕਲਨੀਯ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ f (x) ਦਾ x = 2 ਤੇ ਅਵਕਲਨ ਗਿਆਤ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $y = x^2 + 2x + 2$ ....(i)

$$\therefore y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) + 2 \text{ ....(ii)}$$

$$\therefore y + \Delta y - y = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) + 2 - x^2 - 2x - 2$$

$$\therefore \Delta y = 2x\,\Delta x + \Delta x^2 + 2\Delta x$$

$$\therefore \Delta y = \Delta x(2x + \Delta x + 2)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (2x + \Delta x + 2)$$

$$\underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} (2x + \Delta x + 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2$$

x = 2 ਤੇ ਅਵਕਲਨ ਗੁਣਾਂਕ = f (2) = 2.2. + 2 = 6

2.2.2 ਆਦਿ ਤੋਂ ਅਵਕਲਜ (Differentiation 'abinitio' or from the first principle)

ਅਵਕਲਨ ਦੇ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਜਾਂ ਮਿਆਰੀ ਪ੍ਰਮੇਆਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਅਵਕਲਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਤਕਨੀਕ ਨੂੰ ਆਦਿ ਤੋਂ ਅਵਕਲਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ....(i)

$$\therefore y + \Delta y = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x}} \quad ....(ii)$$

ਸਮੀਕਰਣ (ii) ਵਿੱਚੋਂ ਸਮੀਕਰਣ (i) ਨੂੰ ਘਟਾਓ

$$\therefore \Delta y = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Delta y = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x + \Delta x}}{\left(\sqrt{x + \Delta x}\right)\left(\sqrt{x}\right)}$$

$$\Delta y = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x + \Delta x}}{\left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x}\right)} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x}}$$

$$\Delta y = \frac{-\Delta x}{\left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x}\right)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x + \Delta x}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x}\right)}$$

$$\underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{x\left(2\sqrt{x}\right)} = \frac{-1}{2x^{3/2}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 2: $y = \frac{3x + 4}{4x + 5}$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਆਦਿ ਤੋਂ ਅਵਕਲਜ ਕਰੋ।

$$y = \frac{3x + 4}{4x + 5} \quad ....(i)$$

$$y + \Delta y = \frac{3(x + \Delta x) + 4}{4(x + \Delta x) + 5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

ਸਮੀਕਰਣ (i) ਨੂੰ (ii) ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਓ

$$\Delta y = \frac{3(x + \Delta x) + 4}{4(x + \Delta x) + 5} - \frac{3x + 4}{4x + 5}$$

$$\Delta y = \frac{(3x + 3\Delta x + 4)(4x + 5) - (3x + 4)(4x + 4\Delta x + 5))}{(4x + 4\Delta x + 5)(4x + 5)}$$

$$\Delta y = \frac{-\Delta x}{(4x + 4\Delta x + 5)(4x + 5)}$$

$$\Delta y = \frac{-1}{(4x + 4\Delta x + 5)(4x + 5)}$$

$$\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{(4x + 5)^2}$$

$$\text{or } \frac{d}{dx}(y) = \frac{-1}{(4x + 5)^2}$$

2.3 ਅਵਕਲਨ ਦੇ ਕੁਝ ਨਿਯਮ (Rules of Differentiation)

ਕੁਝ standard ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਵਕਲਨ ਦੇ ਨਿਯਮ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ :

2.3.1 ਸਾਧਾਰਨ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਯਮ

2.3.1.1 ਚਰ ਦਾ ਅਵਕਲਜ (Derivative of a variable)

ਮੰਨ ਲਉ $y = x$, ਤਾਂ

$$\frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

2.3.1.2 ਅਚਰ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਅਵਕਲਜ (Derivative of a constant)

ਮੰਨ ਲਉ $y = c$, ਤਾਂ

$$\frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

2.3.1.3 x^n ਦਾ ਅਵਕਲਜ

ਮੰਨ ਲਉ $y = x^n$, ਤਾਂ

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

2.3.1.4 ax^n ਦਾ ਅਵਕਲਜ

ਜੇਕਰ $y = ax^n$, ਤਾਂ

$$\frac{d}{dx}\left(ax^n\right) = anx^{n-1}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3: ਜੇਕਰ y = 7 ਤਾਂ

$$\frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(7) = 0$$

ਜੇਕਰ $y = x^9$, ਤਾਂ

$$\frac{d}{dx}\left(x^9\right) = 9x^{9-1} = 9x^8$$

ਜੇਕਰ $y = 15x^6$

$$\therefore \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}\left(15x^6\right) = 15\frac{d}{dx}\left(x^6\right) = 15\times 6x^5 = 90x^5$$

2.3.2 ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਜਾਂ ਘਟਾਓ ਦਾ ਅਵਕਲਜ

ਮੰਨ ਲਓ $y = \mu \pm v$

ਜਿਥੇ $\mu = f(x)$ and $v = g(x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\mu) \pm \frac{d}{dx}(v)$$

ਉਦਾਹਰਣ 4: ਮੰਨ ਲਓ

$y = (3x^3 - 2x^2 + 7) \pm (7x^2 + 8)$

ਜਿਥੇ $\mu = 3x^3 - 2x^2 + 7$ ਅਤੇ $v = 7x^2 + 8$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3x^3 - 2x^2 + 7\right) \pm \frac{d}{dx}\left(7x^2 + 8\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(9x^2 - 4x\right) \pm 14x = 9x^2 + 14x - 4x = 9x^2 + 10x$$

ਜਾਂ $9x^2 - 4x - 14x = 9x^2 - 18x$

2.3.3 ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਅਵਕਲਜ

ਮੰਨ ਲਓ $y = \mu v$

ਜਿਥੇ $\mu = f'(x)$

$v = \phi(x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\mu v) = \mu.\frac{d}{dx}(v) + v.\frac{d}{dx}(\mu)$$

ਉਦਾਹਰਣ 5: ਮੰਨ ਲਓ $y = (x^2 + 2x)^3 (x - 7)$

ਜਿਥੇ $u = (x^2 + 2x)^3$ ਅਤੇ $v = (x - 7)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^2 + 2x\right)^3 (x-7) = \left(x^2 + 2x\right)^3 .\frac{d}{dx}(x-7) + (x-7)\frac{d}{dx}\left(x^2 + 2x\right)^3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(x^2 + 2x\right)^3 .1 + (x-7).3\left(x^2 + 2x\right)^2 .\frac{d}{dx}\left(x^2 + 2x\right)$$

$$= \left(x^2+2x\right)^3 + 3(x-7)\left(x^2+2x\right)^2(2x+2)]$$

$$= \left(x^2+2x\right)^2\left[x^2+2x+6(x-7)(x+1)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(x^2+2x\right)^2\left[7x^2-34x-42\right]$$

2.3.4 ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਅਵਕਲਜ

ਮੰਨ ਲਓ $y = \frac{u}{v}$

ਜਿਥੇ $\mu = f'(x)$

$v = \phi(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u.\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

ਇਸ ਨੂੰ ਅੱਖਰਾਂ ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਅਵਕਲ ਗੁਣਾਂਕ

$$= \frac{(\text{ਹਰ}) \times (\text{ਅੰਸ਼ ਦਾ ਅਵਕਲ ਗੁਣਾਂਕ}) - (\text{ਅੰਸ਼})\ (\text{ਹਰ ਦਾ ਅਵਕਲ ਗੁਣਾਂਕ})}{(\text{ਹਰ})^2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 6: ਮੰਨ ਲਓ $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(1-x)^{1/2}\frac{d}{dx}(1+x)^{1/2} - (1+x)^{1/2}.\frac{d}{dx}(1-x)^{1/2}}{(1-x)}$$

$$= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} - (1+x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\ (1-x)^{-½}(-1)}{(1-x)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}} + \frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}}}{(1-x)} = \frac{1}{(1+x)^{1/2}(1-x)^{3/2}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 7: ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਵਕਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਲੱਭੋ।

(i) $4x^3 - 7$ (ii) $(2x^2 - 7)(4x + 3)$

(iii) $\frac{x^2+4}{x+2}$ (iv) $(x + 2)(2x + 1)$

(i) $y = 4x^3 - 7, \frac{dy}{dx} = 4\frac{d}{dx}\left(x^3\right) - \frac{d}{dx}(7)$

$\frac{dy}{dx} = 12x^2$

(ii) $y = (2x^2 - 7)(4x + 3)$

$\frac{dy}{dx} = \left(2x^2 - 7\right)\frac{d}{dx}(4x+3) + (4x+3)\frac{d}{dx}\left(2x^2 - 7\right)$

$\frac{dy}{dx} = \left(2x^2 - 7\right)(4) + (4x+3)(4x)$

$= 8x^2 - 28 + 16x^2 + 12x = 24x^2 + 12x - 28$

(iii) $y = \frac{x^2 + 4}{x + 2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+2)\frac{d}{dx}\left(x^2+4\right) - \left(x^2+4\right)\frac{d}{dx}(x+2)}{(x+2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x+2)(2x) - \left(x^2+4\right)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2 - 4}{(x+2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 4x - 4}{(x+2)^2}$$

(iv) $y = (x + 2 (2x + 4)$

$\frac{dy}{dx} = (x+2)\frac{d}{dx}(2x+4) + (2x+4)\frac{d}{dx}(x+2)$

$= (x + 2)(2) + (2x + 4).1$

$= 2x + 4 + 2x + 4 = 4x + 8$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਲੜੀ 1

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਵਕਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਲੱਭੋ।

1. (i) $2x^3 - 5x^2 + 7x + 8$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (iii) $\frac{3x}{5x^2 + 3}$

2. (i) $\frac{6x^2}{2x + 1}$ (ii) $\frac{2x}{5x^2 + 4}$ (iii) $\sqrt{\frac{1 - 2x}{1 + 2x}}$

3. (i) $\frac{x^3}{x^2 + 1}$ (ii) $\frac{1 + x}{\sqrt[3]{1 - x}}$ (iii) $\frac{(x+2)(x+3)}{(x-2)(x-3)}$

4. (i) $x.\sqrt[3]{x-1}$ (ii) $\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)$ (iii) $(5x-7)3.(4x-3)$

2.4 ਕੁਝ ਹੋਰ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਵਕਲਨ

2.4.1 fJÆ cbB d/ cbB dk nt ebi **(Derivative of a function of a function)**

ਮੰਨ ਲਓ $y = f(u)$ ਅਤੇ $u = \phi(x)$

ਇਥੇ y, u ਦਾ ਅਸਿੱਧਾ ਫਲਨ ਹੈ।

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

ਇਸ ਨੂੰ Chain Rule ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਮੰਨ ਲਓ $y = \mu^3 - 7\mu^2 + 8$, ਅਤੇ $\mu = x^2 - 4x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\mu} \times \frac{d\mu}{dx}$$

$$y = \mu^3 - 7\mu^2 + 8$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = 3\mu^2 - 14\mu$$

$$\mu = x^2 - 4x$$

$$\therefore \frac{d\mu}{dx} = 2x - 4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(3\mu^2 - 14\mu\right)(2x-4)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \mu(3\mu - 14)(2x-4)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(x^2 - 4x\right)\left(3x^2 - 12x - 14\right)(2x-4)$$

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਮੰਨ ਲਓ $z = y^3 - 7y^2 + 2y$ ਅਤੇ $y = x^2$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dz}{dy} = \left(3y^2 - 14y + 2\right),\ \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \left(3x^4 - 14x^2 + 2\right)(2x)$$

2.4.2 ਪ੍ਰਾਚਲਿਕ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਵਕਲਜ (Derivatives of an implicit functions)

$ax^2 + by^2 + ex + dy + c = 0$ ਇਕ ਪ੍ਰਾਚਲਿਕ ਫਲਨ (Implicit function) ਦਾ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਰ ਚਰ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿੱਧੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ ਤੋਂ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ। ਪ੍ਰਚਲਿਤ ਫਲਨ ਦਾ ਅਵਕਲਜ ਗਿਆਤ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}, \frac{d}{dx}\left(y^n\right) = ny^{n-1}.\frac{d}{dx}(y)$$

ਉਦਾਹਰਣ 10.

ਮੰਨ ਲਓ $7x^3y^2 - 8x^2y + 4xy^2 - 3y^3 = 0$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 7\frac{d}{dx}\left(x^3y^2\right) - 8\frac{d}{dx}\left(x^2y\right) + 4\frac{d}{dx}\left(xy^2\right) - 3\frac{d}{dx}\left(y^3\right) = 0$$

$$\therefore 7\left[x^3.2y\frac{dy}{dx} + 3x^2y^2\right] - 8\left[x^2.\frac{dy}{dx} + y.2x\right] + 4\left[x.2y\frac{dy}{dx} + y^2\right] - 3.3y^2.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \left[14x^3y - 8x^2 + 8xy - 9y^2\right]\frac{dy}{dx} = -21x^2y^2 + 16xy - 4y^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-21x^2y^2 + 16xy - 4y^2}{4x^3y + 8xy - 8x^2 - 9y^2}$$

ਪ੍ਰਚਲਨ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਵਕਲਜ (Derivative of Parametric Function)

ਪ੍ਰਚਲਨ ਫਲਨਾਂ ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਚਰ ਕਿਸੇ ਤੀਸਰੇ ਚਰ t ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਯਾਨੀ

$y = f(t)$

$x = \phi(t)$

ਹੁਣ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}$

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਮੰਨ ਲਓ

$y = 4t^2 - 2t + 7$ ਅਤੇ $x = 3t^3$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = 8t - 2, \frac{dx}{dt} = 9t^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 8t - 2 / 9t^2$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਲੜੀ 2

1. ਜੇਕਰ $y = z^3 + 7z^4$ ਅਤੇ $z = 3x^2$

   $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. ਜੇਕਰ $z = z\,w^2 + 1, w = 2x^3 + 5,$ ਤਾਂ $\frac{dz}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ $3x^3 + 5xy + 3y^2 = 0$

4. $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

2.5 ਸਾਰਾਂਸ਼

ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਸਾਧਾਰਨ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਵਕਲਜ ਗਿਆਤ ਕਰਨ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਉਦਾਹਰਣ ਸਹਿਤ ਦੱਸੇ ਗਏ ਹਨ। ਅਵਕਲਜ ਅਤੇ ਅਵਕਲਨ ਵਿੱਚ ਫਰਕ ਵੀ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

2.6 ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਛੋਟੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) ਅਵਕਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੱਸੋ।

(ii) ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਅਵਕਲਜ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ।

(iii) Chain Rule ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ ?

(iv) ਪ੍ਰਾਚਲਿਕ ਫਲਨ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ ?

ਵੱਡੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਵਕਲਜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $2x^2 + 3xy = 7$ (ii) $\frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x}}$

(iii) $\frac{x^2}{\sqrt{4x - x^4}}$ (iv) $(5+3x)^{10}\left(x^2+7\right)^8$

2. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਆਦਿ ਤੋਂ ਅਵਕਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\frac{6x^2}{2x-1}$ (ii) $3x^2 + 4$

3.7 ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

1. C.S. Aggarwal and R.C. Joshi : Mathematics for Students of Economics.
2. O.P. Bhardwaj and J.R. Sabharwal : Mathematics for Students of Economics.
3. S.C. Aggarwal and R.K. Rana : Basic Mathematics for Economists.

ਪਾਠ ਨੰ: 1.3 ਲੇਖਿਕਾ : ਡਾ. ਵਿਪਲਾ ਚੋਪੜਾ

ਲਾਗੇਰਿਧਮਿਕ ਅਤੇ ਐਕਸਪੋਨੈਸ਼ੀਅਲ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਵਕਲਨ
(Differentiation of Logarithmic and Exponential Functions)

ਰੂਪ-ਰੇਖਾ (Structure)

3.0 ਭੂਮਿਕਾ
3.1 ਮੰਤਵ
3.2 ਲਾਗੇਰਿਧਮਿਕ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਵਕਲਜ
3.3 ਐਕਸਪੋਨੈਸ਼ਲ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਵਕਲਜ
3.4 ਸਾਰਾਂਸ਼
3.5 ਪ੍ਰਸ਼ਨ
3.6 ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

3.0 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਿਛਲੇ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਾਧਾਰਨ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਵਕਲਜ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਿੱਤੀ ਸੀ ਅਤੇ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਲਾਗੇਰਿਧਮਿਕ ਅਤੇ ਐਕਸਪੋਨੈਸ਼ਲ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਵਲਕਜ ਗਿਆਤ ਕਰਾਂਗੇ। ਲਾਗੇ ਰਿਧਮਿਕ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਵਲਕਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਲਾਗੇਰਿਧਮਿਕ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਅਤੇ ਲਾਗੇਰਿਧਮ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਲੈਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਲਾਗੇਰਿਧਮ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ

ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਆਧਾਰ ਲਈ ਲਾਗੇਰਿਧਮ, ਆਧਾਰ ਦੀ ਉਹ ਸ਼ਕਤੀ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ :

$10^2 = 100$

ਇਸ ਲਈ $\text{Log}_{10} 100 = 2$

ਜੇਕਰ $4^2 = 16$ ਤਾਂ $\text{Log}_4 16 = 2$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ $a^x = y$, $\text{Log}_a y = x$

ਲਾਗੇਰਿਧਮ ਦੇ ਨਿਯਮ

ਲਾਗੇਰਿਧਮ ਦੇ ਤਿੰਨ ਨਿਯਮ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹਨ। ਜੇਕਰ m ਅਤੇ n ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ

(i) $\text{Log}_a mn = \text{Log}_a m + \text{Log}_a n$ (Product Formula)

(ii) $\text{Log}_a m^n = n \text{Log}_a m$ (Power Formula)

(iii) $\text{Log}_a \frac{m}{n} = \text{Log}_a m - \text{Log}_a n$ (Quotient Formula)

3.1 ਮੰਤਵ

ਇਸ ਪਾਠ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੰਤਵ ਲਾਗੇਰਿਧਮਿਕ ਅਤੇ ਐਕਸਪੋਨੈਸ਼ਲ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਵਕਲਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਵਲਕਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਪਿਛਲੇ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਦੱਸੇ Standard ਨਿਯਮ ਹੀ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

3.2 ਲਾਗੇਰਿਥਮਿਕ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਵਕਲਜ

ਮੰਨ ਲਉ $y = Log_a x$ .... (i)

ਜੇਕਰ x ਦੇ ਮਾਨ ਵਿੱਚ ਅਲਪਵ੍ਰਿਧੀ (Small increment) Δx ਹੋਵੇ ਤਾਂ y ਦੇ ਮਾਨ ਵਿੱਚ ਵੀ Δy ਸੰਗਤ ਵ੍ਰਿਧੀ ਹੋਵੇਗੀ।

$\therefore y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$ .... (ii)

ਸਮੀਕਰਣ (ii) ਵਿਚੋਂ ਸਮੀਕਰਣ (i) ਨੂੰ ਘਟਾਉਣ ਤੇ

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x$$

$$\Delta y = \log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) ....(iii) \quad \left(\therefore \log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n\right)$$

ਸਮੀਕਰਣ (iii) ਨੂੰ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ Δx ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} . \frac{x}{x} \log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \qquad \left(\therefore \log_a m^n = n \log_a m\right)$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਲਿਮਿਟ ਤੇ, ਜੇਕਰ $\Delta x \to 0$.

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \left[\therefore \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/x} = e\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e ....(iv)$$

Cor I ਜੇਕਰ $a = e$

ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (iv) ਤੋਂ

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x} \qquad [\therefore \log e = 1]$$

Cor II ਜੇਕਰ $y = \log u$, ਜਿਥੇ u, x ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} \text{ (Chain rule)}$$

ਹੁਣ $y = \log_a u$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{d\mu}(\log_a \mu) = \frac{1}{\mu}\log_a e$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\mu}.\log_a e.\frac{d\mu}{dx}$$

Cor III ਜੇਕਰ $y = \log u$, ਜਿਥੇ $u = f(x)$ ਤਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\mu}.\log_a e.\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{\mu}.\frac{d\mu}{dx} \qquad (\therefore \log_e e = 1)$$

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਜੇਕਰ $y = \log_a z^2$

$$\therefore y = 2\log_a z$$

$$\therefore \frac{dy}{dz} = \frac{d}{dz}(2\log_a z) = 2\frac{d}{dz}(\log_a z) = 2\frac{1}{z}\log_a e$$

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਜੇਕਰ $y = \log\left[\sqrt{x^3 - 1}\right]$

$$y = \frac{1}{2}\log\left(x^3 - 1\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\log\left(x^3 - 1\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}.\frac{1}{x^3 - 1}.\frac{d}{dx}\left(x^3 - 1\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}.\frac{1}{x^3 - 1}\left(3x^2\right) = \frac{3x^2}{2\left(x^3 - 1\right)}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਜੇਕਰ $y = \log\left(x^2 . e^{mn}\right)$

$$\therefore y = \log x^2 + \log e^{mn} \qquad (\therefore \log mn = \log m + \log n)$$

$$= 2\log x + mn\log e$$

$$= 2\log x + mn \qquad (\therefore \log e = 1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\log x) + \frac{d}{dx}(mn)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}$$

ਉਦਾਹਰਣ 4. $z = \log\left[\sqrt{b^3 - x^3 - x}\right]$

$$= \log\left[b^3 - x^3 - x\right]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left[b^3 - x^3 - x\right] \quad \left(\therefore \log m^n = n\log m\right)$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਅਵਕਲਨ ਲੈਣ ਤੇ

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}.\frac{1}{b^3 - x^3 - x}.\frac{d}{dx}\left(b^3 - x^3 - x\right)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{-\left(3x^2 + 1\right)}{b^3 - x^3 - x} = \frac{-1}{2}\frac{\left(3x^2 + 1\right)}{\left(b^3 - x^3 - x\right)}$$

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਜੇਕਰ $y = \log(\log x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\log(\log x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log x}.\frac{d}{dx}(\log x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\,.\log x}$$

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਜੇਕਰ $y = \log\left[\left(2x^2 - x + 1\right)\right]^{1/2}$

$$y = 1/2\log\left[\left(2x^2 - x + 1\right)\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2x^2 - x + 1} \times \frac{d}{dx}\left(2x^2 - x + 1\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 1}{\left(2x^2 - x + 1\right)}$$

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਮੰਨ ਲਓ $y = x^2 \log_3 x$ w.r. to x.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^2\,\frac{d}{dx}(\log_3 x) + \log_3 x.\frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2.\frac{1}{x}.\log_3 e + \log_3 x.(2x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x\log_3 e + 2x.\log_3 x$$

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਮੰਨ ਲਓ $z = \log\left(x^3 - 5x^2 + 9\right)^{3/7}$

Put $\left(x^3 - 5x^2 + 9\right) = u$

$\therefore z = \log u^{3/7}$

$\therefore z = 3/7 \log u$

$$\therefore \frac{dz}{d\mu} = \frac{3}{7} \times \frac{1}{u} . \frac{du}{dx} = \frac{3}{7} . \frac{1}{x^3 - 5x^2 + 9} . \left(3x^2 - 10x\right)$$

$$\frac{dz}{d\mu} = \frac{3}{7} . \frac{3x^2 - 10x}{x^3 - 5x^2 + 9}$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਲੜੀ 1

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਲਈ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(a) $y = x^2 \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}}$

(b) $y = \log \sqrt{\frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}}$

(c) $y = \log\left(x^2 - 5x^2\right)$

(d) $y = \log\left(\sqrt{a^2 - x^2 + x}\right)$

2. ਜੇਕਰ $y = \sqrt{\frac{1+x}{1+x}}$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\left(1 - x^2\right)\frac{dy}{dx} - y = 0.$

3.3 ਐਕਸਪੋਨੈਸ਼ੀਅਲ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਵਕਲਜ

ਇਕ ਫਲਨ ਜਿਸ ਦਾ ਬੇਸ (Base) ਸਥਿਰ (Constant) ਹੋਵੇ ਅਤੇ exponent (ਜਾਂ Power) ਦਾ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਐਕਸਪੋਨੈਸ਼ੀਅਲ ਫਲਨ ਆਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਵਿੱਚ Constant Base ਜਾਂ ਤਾਂ a ਜਾਂ e ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ $a^x, a^{x^3-1}, e^x, e^{x^2}$ ਆਦਿ ਐਕਸਪੋਨੈਸ਼ੀਅਲ ਫਲਨਾਂ ਹਨ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਐਕਸਪੋਨੈਸ਼ੀਅਲ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਵਕਲਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ।

Case-I ਮੰਨ ਲਓ $y = a^x$ …………(i) ਜਿਥੇ a ਇਕ Constant ਹੈ।

$\therefore y + \Delta y = a^{x+\Delta x}$ …………(ii)

ਸਮੀਕਰਣ (ii) ਵਿਚੋਂ ਸਮੀਕਰਣ (i) ਘਟਾਉਣ ਤੇ

$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x$

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ Δx ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x}$$

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} a^x \left[\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x \log a \left[\therefore \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{a^x - 1}{x} = \log a\right]$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x . \log a.$$

Case II ਹੁਣ ਸਮੀਕਰਣ (i) ਵਿੱਚ a = e ਭਰਨ ਤੇ

$y = e^x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^x . \log e = e^x \qquad (\therefore \log e = 1)$$

Case III ਜੇਕਰ $y = a^{\mu}$ ਜਿਥੇ μ, x .... (ii) ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

By Chain rule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

ਹੁਣ $y = a^u$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{d\mu}\left(a^u\right) = a^u \log a . \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a^u \log a . \frac{du}{dx}$$

Case IV Put a = e in (ii)

$\therefore y = e^u$ ਜਿਥੇ u, x ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{\mu}\right) = e^{\mu} . \log e . \frac{d\mu}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\mu}\right) = e^{\mu} . \frac{d\mu}{dx}$$

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਮੰਨ ਲਓ $y = 7^{2x+3}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 7^{2x+3} . \log 7 . \frac{d}{dx}^{(2x+3)} \left(\therefore \frac{d}{dx}(a\mu) = a\mu \log a . \frac{d\mu}{dx}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(7^{2x+3}\right) = 7^{2x+3} . \log 7.2 = 2.7^{2x+3} . \log 7.$$

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਮੰਨ ਲਓ $y = \sigma^x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 6^x \log 6 \left(\therefore \frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x . \log a \right)$$

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਮੰਨ ਲਓ $y = e^{\sqrt[3]{x^3 - 7}}$

Put $\sqrt[3]{x^3 - 7} = \mu$, $y = e^{\mu}$ $\therefore$ $\frac{dy}{d\mu} = e^{\mu}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\mu} \times \frac{d\mu}{dx}$$

ਹੁਣ $$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{3}\left(x^3 - 7\right)^{-\frac{2}{3}} . \frac{d}{dx}\left(x^3 - 7\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\left(x^3 - 7\right)^{2/3}} \times 3x^2$$

$$\therefore \frac{d\mu}{dx} = \frac{x^2}{\left(x^3 - 7\right)^{2/3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{x^3 - 7}} \times \frac{x^2}{\left(x^3 - 7\right)^{2/3}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਮੰਨ ਲਓ $y = e^{\sqrt{4x^2 - x}}$

Put $\sqrt{4x^2 - x} = \mu$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(e^{\mu}\right) = e^{\mu} . \frac{d\mu}{dx}$$

$$= e^{\sqrt{4x^2 - x}} \times \frac{d\mu}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{4x^2 - x}}\right) = e^{\sqrt{4x^2 - x}} \times \frac{1}{2}\left(4x^2 - x\right)^{-\frac{1}{2}} . \frac{d}{dx}\left(4x^2 - x\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{4x^2 - x}}\right) = e^{\sqrt{4x^2 - x}} \times \frac{1}{2\sqrt{4x^2 - x}} . (8x - 1)$$

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਮੰਨ ਲਓ $y = 3e^{3x} + \log x + 2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3e^{3x} + \log x + 2\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3\frac{d}{dx}\left(e^{3x}\right) + \frac{d}{dx}(\log x) + \frac{d}{dx}(2)$$

$$= 3.e^{3x}.3 + \frac{1}{x} = 9e^{3x} + \frac{1}{x}$$

ਉਦਾਹਰਣ 14. ਮੰਨ ਲਓ $y = x^x$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਲਾਗ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log y = \log x^x$$

$$\therefore \log y = \log x \quad \left(\therefore \log m^n = n \log m\right)$$

Differentiate w.r. to x

$$\frac{d}{dx}\log y = \frac{d}{dx}(x \log x)$$

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = x\frac{d}{dx}(\log x) + \log x.\frac{d}{dx}(x)$$

$$\therefore \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \log x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y(\log x + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^x(\log x + 1)$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਲੜੀ 2

1. ਜੇਕਰ $y = x^3$ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਵਕਲਜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (i) $y = 5^x$ (ii) $y = 6^{\sqrt{x^3 - 2x^2}}$

   (iii) $y = e^x$ (iv) $y = e^{\sqrt{2^{x^2 - x}}}$

   (v) $y = 3^{x^2 - 2x}$

3.4 ਸਾਰਾਂਸ਼

ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਲਾਗੇਰਿਧਮਿਕ ਅਤੇ ਐਕਸਪੋਨੈਸ਼ੀਅਲ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਵਕਲਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਨਿਯਮਾਂ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ ਤਾਂਕਿ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਆਸਾਨੀ ਹੋਵੇ।

3.5 ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਛੋਟੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) ਲਾਗੇਰਿਧਮ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੱਸੋ।

(ii) ਐਕਸਪੋਨੈਸ਼ੀਅਲ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਿਉ।

(iii) ਜੇਕਰ $y = 5^x$ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(iv) ਜੇਕਰ $y = e^{x^2-3}$ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(v) ਜੇਕਰ $y = a^{\mu}$ ਜਿਥੇ μ, x ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਦਾ ਨਿਯਮ ਦੱਸੋ।

ਵੱਡੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਵਕਲਜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $y = 4^{5x-2}$ (ii) $y = a^{\sqrt{x}}$

(iii) $y = e^{x^2+2x}$ (iv) $y = \frac{e^x}{x}$

2. (i) Differentiate $4e^{4x} + \log x + 4 + \frac{3}{x}$ w.r.t. x.

(ii) If $y = e^{3\log x}$, prove that $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

3. (i) ਜੇਕਰ $y = a^{\sqrt{x^2+1}}$ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ii) ਜੇਕਰ $y = (a+2x)^{7x}$ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3.7 ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

1. S.C. Aggarwal and R.K. Rana : Basic Mathematics for Economists.
2. C.S. Aggarwal and R.C. Joshi : Mathematics for Students of Economics.
3. Balwant Kandoi : Mathematics for Business and Economics with Applications.

ਪਾਠ ਨੰ: 1.4 | ਲੇਖਿਕਾ : ਡਾ. ਵਿਪਲਾ ਚੋਪੜਾ

ਇੱਕ ਫਲਨ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ
(Maxima and Minima of a Function)

ਰੂਪ-ਰੇਖਾ (Structure)

4.0 ਭੂਮਿਕਾ

4.1 ਮੰਤਵ

4.2 ਧਾਰਨਾਵਾਂ (Concepts)

- 4.2.1 ਵੱਧਦਾ ਫਲਨ
- 4.2.2 ਘੱਟਦਾ ਫਲਨ
- 4.2.3 ਵੱਧਦੇ ਅਤੇ ਘੱਟਦੇ ਫਲਨਾਂ ਲਈ ਸ਼ਰਤਾਂ
- 4.2.4 ਉਪਰ ਵੱਲ ਕਰਕੇਵ ਅਤੇ ਥੱਲੇ ਵੱਲ ਕਨਵੈਕਸ ਫਲਨਾਂ
- 4.2.5 ਇੰਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ (Points of Inflexion)

4.3 ਇਕ ਫਲਨ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕੀਮਤ

4.4 ਇਕ ਫਲਨ ਦੀ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਕੀਮਤ

4.5 ਸਾਰਾਂਸ਼

4.6 ਪ੍ਰਸ਼ਨ

4.7 ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

4.0 ਭੂਮਿਕਾ

ਇਸ ਪਾਠ ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਅਵਕਲਜਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਰਾਹੀਂ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦੇ ਫਲਨ $y = f(x)$ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ ਕੱਢਾਂਗੇ। ਅਰਥ ਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿਚ ਹਰ ਇਕ ਉਤਪਾਦਕ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਕੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ (maximum profits) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਲਾਗਤ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ (Minimum cost) ਹੋਵੇ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਰ ਇਕ ਉਪਭੋਗੀ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤੁਸ਼ਟੀਗੁਣ (Maximum utility) ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੇ।

4.1 ਮੰਤਵ

ਇਸ ਪਾਠ ਨੂੰ ਪੜ੍ਹਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ।

* ਵੱਧਦੇ ਅਤੇ ਘੱਟਦੇ ਫਲਨ
* ਉਪਰ ਵੱਲ ਕਨਕੇਵ ਅਤੇ ਥੱਲੇ ਵੱਲ ਕਨਵੈਕਸ ਫਲਨ
* ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁੱਲ
* ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦਾ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ
* ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ

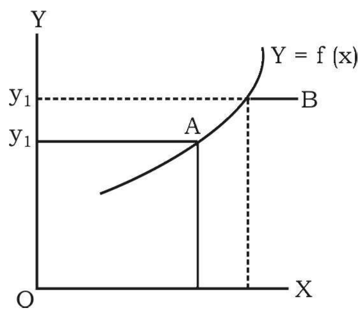
ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੀਆਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ ਬਾਰੇ ਜਾਣਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕੁਝ ਧਾਰਨਾਵਾਂ (Concepts) ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਹੋਣੀ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

4.2 ਧਾਰਨਾਵਾਂ (Concepts)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵੱਧਦੇ, ਘੱਟਦੇ ਫਲਨ, ਉਪਰ ਵਲ ਕਨਕੇਵ (ਜਾਂ ਥੱਲੇ ਵੱਲ ਕਨਵੈਕਸ) ਅਤੇ ਥੱਲੇ ਵੱਲ ਕਨਕੇਵ (ਜਾਂ ਉਪਰ ਵੱਲ ਕਨਵੈਕਸ) ਫਲਨਾਂ ਬਾਰੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਦੇਵਾਂਗੇ।

4.2.1 ਵੱਧਦਾ ਫਲਨ (Increasing Function)

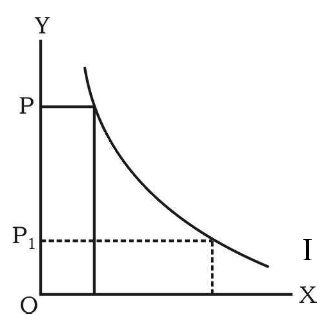
$y = f(x)$ ਇਕ ਵੱਧਦਾ ਫਲਨ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ x ਦੇ ਵੱਧਣ ਨਾਲ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੀ ਵਧੇ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ $y = 3x + 7$, $y = x^3 + 2x^2 + x + 1$, ਪੂਰਤੀ ਫਲਨ $(S_x = f(p))$, ਉਪਭੋਗ ਫਲਨ $[c = f(y)]$ ਆਦਿ ਵੱਧਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ। (A function $y = f(x)$ is said to be an increasing function of x if as x increases, y also increases.) ਵੱਧਦੇ ਫਲਨ ਦੀ ਢਲਾਨ ਹਮੇਸ਼ਾ ਹੀ ਸਕਾਰਾਤਮਕ (Positive) ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਵੱਧਦੇ ਫਲਨ ਦਾ ਗਰਾਫ ਹੇਠਾਂ (ਚਿੱਤਰ) ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1

4.2.2 ਘੱਟਦੇ ਫਲਨ (Decreasing Function)

$y = f(x)$ ਨੂੰ x ਦਾ ਘੱਟਦਾ ਫਲਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਵਧੇ ਤਾਂ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਘੱਟਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਦੋਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਘਟੇ ਦਾ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ। (A function $y = f(x)$ is said to be decreaisng function, if as x increases y decreases.) $y = \frac{1}{x^3}, y = 20 - 4x,$ ਮੰਗ ਫਲਨ ਨਿਵੇਸ਼ ਫਲਨ, $[I = f(r)]$ ਆਦਿ ਘਟਦੇ ਫਲਨ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ। ਘਟਦੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਗਰਾਫ ਰਾਹੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 2

4.2.3 ਵੱਧਦੇ ਅਤੇ ਘੱਟਦੇ ਫਲਨਾਂ ਲਈ ਸ਼ਰਤਾਂ (Conditions for Increasing and Decreasing Functions)

ਪਿਛਲੇ ਦੋ ਪਾਠਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਵਕਲਜ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਸੀ ਜੇਕਰ $y = f(x)$ ਇਕ ਫਲਨ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$, x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਦੇ ਵਿੱਚ ਤਬਦੀਲੀ ਦੀ ਦਰ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2}$, x ਦੇ ਸਾਪੇਖ $\frac{dy}{dx}$ ਵਿੱਚ ਤਬਦੀਲੀ ਦੀ ਦਰ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਨੋਟ : ਪਹਿਲਾ ਅਵਕਲਜ ਫਲਨ ਬਾਰੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਅਵਕਲਜ ਫਲਨ ਦੀ ਢਾਲ ਬਾਰੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ $y = f(x)$ ਇਕ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਇਸ ਨੂੰ ਵੱਧਦਾ ਜਾਂ ਘੱਟਦਾ ਜਾਂ ਸਥਿਰ ਫਲਨ ਕਹਾਂਗੇ :

(i) ਜੇਕਰ $y = f(x)$, ਅਤੇ $\frac{dy}{dx} > 0$ ਤਾਂ x ਦੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ $y = f(x)$, ਅਤੇ $\frac{dy}{dx} < 0$ ਤਾਂ x ਦੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਘੱਟ ਰਿਹਾ ਹੈ।

(iii) ਜੇਕਰ $y = f(x)$ ਅਤੇ $\frac{dy}{dx} = 0$ ਤਾਂ ਫਲਨ ਸਥਿਰ (Stationary) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੂਜੇ ਅਵਕਲਜ ਬਾਰੇ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

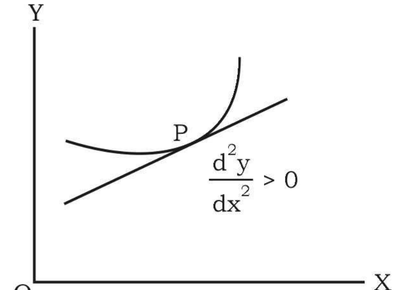
(i) ਜੇ $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ ਤਾਂ $y = f(x)$ ਦੀ ਢਾਲ ਵੱਧ ਰਹੀ ਹੈ।

(ii) ਜੇ $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ ਤਾਂ $y = f(x)$ ਦੀ ਢਾਲ ਘੱਟ ਰਹੀ ਹੈ।

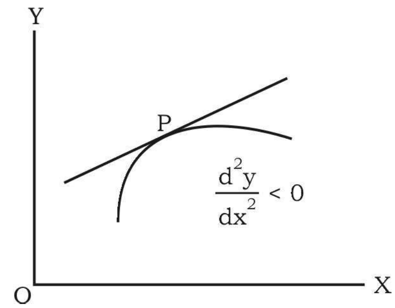
4.2.4 ਉਪਰ ਵੱਲ ਕਨਕੇਵ ਅਤੇ ਥੱਲੇ ਵੱਲ ਕਨਕੇਵ ਫਲਨਾਂ

Let y = f (x) be a function f (x), then the graph of f (x) is said to be concave upwards (or convex down wards) at a point if in the neighbourhood of p, the curve lies above (or below) the tangent at p on both the sides. In other words the graph of y = f (x) is concave upwards if f (x) > 0 and f (x) > 0 and the graph of y = f (x) is concave downwards if f (x) > 0 and f (x) < 0.

ਚਿਤਰ ਨੰ. 3



Concave upwards
(Convex downwards)

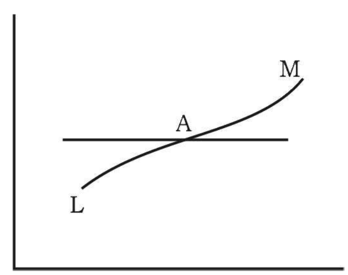


Concave Downwards (Convex upwards)

ਚਿੱਤਰ 4

4.2.5 ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ (Points of Inflexion)

ਚਿੱਤਰ 5 ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ A, ਇਕ ਵਕਰ y = f (x) ਦਾ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਜੇਕਰ $\frac{dy}{dx} = 0$ ਅਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ sign ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ।



ਚਿੱਤਰ 5

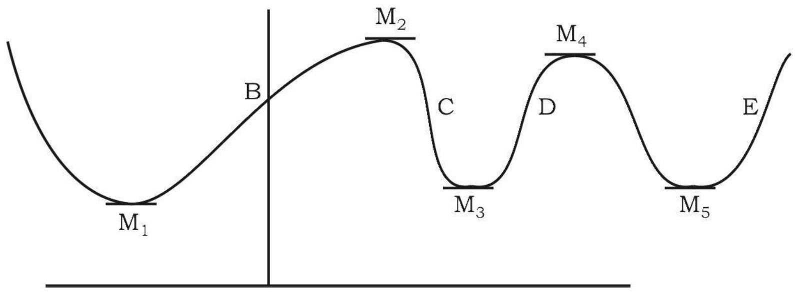
ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਲੜੀ 1

1. ਉਪਰ ਵੱਲ ਕਨਕੇਵ ਅਤੇ ਥੱਲੇ ਵੱਲ ਕਨਕੇਵ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੱਸੋ।
2. Show that $y = x^2 - 4x$ is decreasing at $x = -1$, stationary at $x = 2$ and increasing at $x = 3$.

4.3 ਇਕ ਫਲਨ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕੀਮਤ (Maximum Value of a Function)

ਮੰਨ ਲਓ y = f (x) ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਚਿੱਤਰ 6 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

1. ਬਿੰਦੂਆਂ M_1 ਤੋਂ M_2, M_3 ਤੋਂ M_4, M_5 ਤੋਂ E ਤੱਕ ਵਕਰ ਹੇਠਾਂ ਤੋਂ ਉਪਰ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਫਲਨ y = f (x) ਵੱਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 6 ਵਿੱਚ M_2, M_4 ਵਕਰ y = f (x) ਦੇ ਮੈਕਸੀਮੱਮ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵਕਰ ਉਪਰ ਵੱਲ ਵੱਧਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਪਹੁੰਚਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਹੇਠਾਂ ਵੱਲ ਆਉਂਦੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6

ਮੈਕਸੀਮਾਂ ਮਾਨ ਲਈ ਸ਼ਰਤਾਂ (Conditions for Maximum Value)

ਇਕ ਫਲਨ y = f (x) ਦੀ x = a ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਮੈਕਸੀਮਾਂ ਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਹਨ :

(i) ਜਰੂਰੀ ਸ਼ਰਤ (Necessary Condition)

$$f'(x) = 0 \text{ ਜਾਂ } \frac{dy}{dx} = 0$$

(ii) ਕਾਫੀ ਸ਼ਰਤ (Sufficient Condition)

$$f''(x) < 0 \text{ ਜਾਂ } \frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

4.4 ਇਕ ਫਲਨ ਦੀ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਕੀਮਤ (Minimum Value of a Function)

1. ਚਿੱਤਰ 6 ਵਿੱਚ ਵਕਰ y = f (x) ਬਿੰਦੂ M_1 ਤੋਂ M_2 ਤੱਕ, M_3 ਤੋਂ M_4 ਤੱਕ ਅਤੇ M_5 ਤੋਂ E ਤੱਕ ਹੇਠਾਂ ਤੋਂ ਉਪਰ ਵੱਲ ਵਧਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਫਲਨ y = f (x) ਵੱਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।
2. ਚਿੱਤਰ 6 ਵਿੱਚ M_1, M_3 ਅਤੇ M_5 ਵਕਰ y = f (x) ਦੇ ਮਿਨੀਮੱਮ ਬਿੰਦੂ ਹਨ।

ਮਿਨੀਮੱਮ ਮਾਨ ਲਈ ਸ਼ਰਤਾਂ

ਇਕ ਫਲਨ y = f (x) ਦੇ ਮਿਨੀਮੱਮ ਮਾਨ f (x) at x = a ਲਈ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਹਨ

(i) ਜਰੂਰੀ ਸ਼ਰਤ (Necessary Condition)

$$f'(x) = 0 \text{ ਜਾਂ } \frac{dy}{dx} = 0$$

(ii) ਕਾਫੀ ਸ਼ਰਤ (Sufficient Condition)

$$f''(x) < 0 \text{ ਜਾਂ } \frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

ਇੰਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ ਲਈ ਸ਼ਰਤਾਂ

ਜੇ f' (x) ਅਤੇ f" (x) ਦੋਵੇਂ ਸਿਫਰ ਹੋਣ ਤਾਂ x = a ਇੰਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਜੇ f' (x) = 0 ਜਾਂ $\frac{dy}{dx} = 0$ ਅਤੇ $f''(x) = 0$ ਜਾਂ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ ਲੱਭੋ।

(i) $3x^2 - 12x + 7$

(ii) $x^3 - 9x^2 + 24x + 5$

ਹੱਲ : (i) $y = 3x^2 - 12x + 7$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x - 12$$

ਹੁਣ $\frac{dy}{dx} = 0$ ਤਾਂ $6x - 12 = 0 \therefore x = 2.$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6 > 0$$

$x = 2$ ਫਲਨ ਦਾ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

$y_{min} = 3x^2 - 12x + 7 = 3(2)^2 - 12(2) + 7$

$= 12 - 24 + 7 = -5.$

(ii) ਮੰਨ ਲਓ $y = x^3 - 9x^2 + 24x + 5$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 18x + 24$$

ਹੁਣ $\frac{dy}{dx} = 0 \therefore 3x^2 - 18x + 24 = 0.$

$$3\left(x^2 - 6x + 8\right) = 0$$

$$3(x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ or } x = 4$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 18$$

ਜੇਕਰ $x = 2, \frac{d^2y}{dx^2} = 6 \times 2 - 18 = -6$

ਜੇਕਰ $x = 4, \frac{d^2y}{dx} = 6 \times 4 - 18 = +6$

$\therefore$ $x = 2$ ਮੈਕਸੀਮਾਂ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਫਲਨ ਮਾਨ $f(2)$

$f(2) = (2)^3 - 9(2)^2 + 24(2) + 5$

$= 8 - 36 + 48 + 5 = 25$ ਹੈ।

$x = 4$ ਮਿਨੀਮਾਂ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਫਲਨ ਮਾਨ $f(4)$

$f(4) = 4^3 - 9 \times 4^2 + 24 \times 4 = 21$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਫਲਨ $y = x^3(x-1)^2$ ਦੇ ਮੈਕਸੀਮਾਂ ਅਤੇ ਮਿਨੀਮਾਂ ਬਿੰਦੂ ਲਭੋ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੈਕਸੀਮੱਮ ਮਾਨ ਲੱਭੋ।

ਹੱਲ: ਹੁਣ $y = x^3(x-1)^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^3 . 2(x-1) + (x-1)^2 .3x^2$$

$$= x^2(x-1)(2x+(x-1).3)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^2(x-1)(5x-3)$$

ਹੁਣ $\frac{dy}{dx} = 0 \therefore x^2(x-1)(5x-3) = 0$

Either $x^2 = 0$, or $(x-1)(5x-3) = 0$

$$\therefore x = 0, 1, \frac{3}{5}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 \frac{d}{dx}(x-1)(5x-3) + (x-1)(5x-3).\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2[(x-1)\times 5 + (5x-3).1] + (x-1)(5x-3)(2x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^2(10x-8) + (x-1)(5x-3)2x$$

At $x = 0, \frac{d^2y}{dx} = 0$

At $x = 1, \frac{d^2y}{dx^2} = 1\times 2 + 0\times 2\times 2 = 2 > 0$

At $x = \frac{3}{5}, \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2\left[10\times\frac{3}{5}-8\right] + \left(\frac{3}{5}-1\right) --- + \left(5\times\frac{3}{5}-3\right)2\times\frac{5}{3}$

$$= \frac{9}{25}\left[(6-8) + \left(-\frac{2}{5}\right)(0)\times\frac{5}{3}\right]$$

$$= \frac{9}{25}\times -2 = -\frac{18}{25} < 0$$

$x = \frac{3}{5}$ ਮੈਕਸੀਮਾਂ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਥੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}-1\right)^2$$

$= \frac{27}{125} \times \frac{4}{25} = \frac{108}{3125}$ ਹੈ।

$x = 1$ ਮਿਨੀਮਾਂ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਥੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ $f(1) = 1^3 (1-1)^2 = 0$ ਹੈ।

$x = 0$ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $y = x + \frac{1}{x}$ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮਾਨ ਇਸ ਫਲਨ ਦੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮਾਨ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਓ $y = x + \frac{1}{x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$$

ਹੁਣ $\frac{dy}{dx} = 0 ; \frac{x^2-1}{x^2} = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$(x+1)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, -1$$

ਜਦੋਂ $x = 1, \frac{d^2y}{dx^2} = 2 > 0$

$x = 1$ ਮਿਨੀਮਾਂ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

$x = 1$ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$

ਜਦੋਂ $x = -1, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{-1^3} = -2 < 0$

$x = -1$ ਮੈਕਸੀਮਾਂ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ $f(-1) = 1 + \frac{1}{-1} = 0$ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਫਲਨ ਦਾ ਮੈਕਸੀਮਾਂ ਦਾ ਮਾਨ, ਮਿਨੀਮਾਂ ਦੇ ਮਾਨ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਲੜੀ 2

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ ਕੱਢੋ।
   - (i) $y = 2x^3 - 21x^2 + 36x + 10$
   - (ii) $(x-3)^3 (x+1)^2$
   - (iii) $y = x^2 + 4x + 3$

(iv) $y = 4x^3 + 10 + \frac{16}{x}$

(v) $y = (x-2)^2 (x-3)^2$

2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 10$ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁੱਲ (Maximum Value) ਹੋਵੇਗਾ ਜਦ $x = 1$ ਅਤੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ ਜਦ $x = 3$ ਅਤੇ ਜਦ $x = 0$ ਤਾਂ ਨਾ ਇਸ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ ਤੇ ਨਾ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ।

3. ਫਲਨ $y = x^4 - 6x^2 - 8x - 1$ ਦਾ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ ਕੱਢੋ।

4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $y = 40 - 6x + x^2$, ਬਿੰਦੂ $x = 2$ ਤੇ ਘੱਟ ਰਿਹਾ ਹੈ, $x = 3$ ਤੇ ਸਥਿਰ ਹੈ ਅਤੇ $x = 5$ ਤੇ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ।

4.5 ਸਾਰਾਂਸ਼

ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ (Basic Concepts) ਜਿਵੇਂ ਵੱਧਦਾ ਫਲਨ, ਘੱਟਦਾ ਫਲਨ, ਕਨਕੇਵ (Concave) ਅਤੇ ਕਨਵੇਕਸ (Convex) ਫਲਨਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਮੈਕਸੀਮਾਂ ਅਤੇ ਮਿਨੀਮਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਬਾਰੇ ਵੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਕੇ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

4.6 ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਛੋਟੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) ਵੱਧਦੇ ਅਤੇ ਘੱਟਦੇ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੱਸੋ।

(ii) ਉਪਰ ਵੱਲ ਕਨਕੇਵ ਫਲਨ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ।

(iii) ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਿਉ।

(iv) ਮਿਨੀਮੱਮ ਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿਹੜੀਆਂ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਹਨ।

(v) ਮੈਕਸੀਮੱਮ ਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿਹੜੀਆਂ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਹਨ।

ਵੱਡੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ ਕੱਢੋ।

1. (i) $y = x^2 - 4$ (ii) $(x-1)^2 (x+3)^3$

2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = x^3 - 27x + 108$ ਦੀ ਮੈਕਸੀਮਮ ਮਾਨ, ਮਿਨੀਮਮ ਮਾਨ ਤੋਂ 108 ਗੁਣਾ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ।

3. ਫਲਨ $x^3 + 2x^2 - 4x + 8$ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁੱਲ ਤੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $2x + \frac{1}{2x}$ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁੱਲ ਇਸ ਦੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।

4.7 ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

1. C.S. Aggarwal and R.C. Joshi : Mathematics for Students of Economics.
2. S.L. Aggarwal, S.L. Bhardwaj and Inder Kumar : Quantitative Methods (Punjabi).
3. S.C. Aggarwal and R.K. Rana : Basic Mathematics for Economists.

ਪਾਠ ਨੰ: 1.5

ਲੇਖਿਕਾ : ਡਾ. ਵਿਪਲਾ ਚੋਪੜਾ

ਸਾਧਾਰਣ ਅਵਕਲਜਾਂ ਦੀ ਅਰਥ-ਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ
(Application of Simple Derivatives in Economics)

ਰੂਪ-ਰੇਖਾ **(Structure)**

5.0 ਭੂਮਿਕਾ
5.1 ਮੰਤਵ
5.2 ਅਰਥ-ਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ
  5.2.1 ਮੰਗ ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਨ
  5.2.2 ਮੰਗ ਦੀ ਲਚਕ
  5.2.3 ਪੂਰਤੀ ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਨ
  5.2.4 ਪੂਰਤੀ ਦੀ ਲਚਕ
  5.2.5 ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ ਅਤੇ ਔਸਤ ਆਮਦਨ ਦੀਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ
  5.2.6 ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ ਅਤੇ ਔਸਤ ਲਾਗਤ ਦੀਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ
  5.2.7 ਮੰਗ ਲਚਕ ਅਤੇ ਆਮਦਨ ਧਾਰਨਾਵਾਂ
5.3 ਸਾਰਾਂਸ਼
5.4 ਪ੍ਰਸ਼ਨ
5.5 ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

5.0 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਾਠ ਨੰ. 2 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਾਧਾਰਣ ਅਵਕਲਜਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਜੇਕਰ $y = f(x)$ ਇਕ ਫਲਨ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਅਵਕਲਜ ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਇਕ ਚਰ ਵਿੱਚ ਹੋਈ ਤਬਦੀਲੀ ਦੀ ਦਰ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਚਰ ਵਿੱਚ ਹੋਈ ਤਬਦੀਲੀ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਗਿਆਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਤਬਦੀਲੀ ਦੀ ਇਹ ਦਰ ਸਾਨੂੰ ਸੀਮਾਂਤ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਬਾਰੇ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਅਵਕਲਜਾਂ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਅਰਥ-ਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਕਈ ਧਾਰਨਾਵਾਂ (Concepts) ਜਿਵੇਂ ਸੀਮਾਂਤ ਤੁਸ਼ਟੀਗੁਣ, ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ, ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ, ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਆਦਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਮਦਦ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਵਕਲਜਾਂ ਦੀ ਅਰਥ-ਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੰਚ ਵਰਤੋਂ ਬਾਰੇ ਵਿਸਤਾਰ ਨਾਲ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇਵਾਂਗੇ।

5.1 ਮੰਤਵ

ਇਸ ਪਾਠ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੰਤਵ ਅਵਕਲਜਾਂ ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਹੈ :

* ਮੰਗ ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਨ (Slope of Demand Curve)
* ਮੰਗ ਦੀ ਲਚਕ (Elasticity of Supply)
* ਪੂਰਤੀ ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਨ (Slope of Supply Curve)
* ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ ਅਤੇ ਔਸਤ ਆਮਦਨ ਦੀਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ (Concepts of Marginal Revenue and Average Revenue)
* ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ ਅਤੇ ਔਸਤ ਲਾਗਤ ਦੀਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ (Concepts of Marginal Cost and Average Cost)

* ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ ਅਤੇ ਔਸਤ ਲਾਗਤ ਲਚਕ (Elasticity of Total Cost and Elasticity of Average Cost)
* ਮੰਗ ਲਚਕ ਅਤੇ ਆਮਦਨ ਧਾਰਨਾਵਾਂ (Elasticity of Demand and Concept of Revenue)

5.2 ਅਰਥ-ਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ

5.2.1 ਮੰਗ ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਨ

ਮੰਗ ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਨ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਆਈ ਤਬਦੀਲੀ ਕਾਰਨ ਮੰਗੀ ਮਾਤਰਾ ਵਿੱਚ ਆਈ ਤਬਦੀਲੀ ਦੀ ਦਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ $q = f(p)$ ਤਾਂ ਮੰਗ ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਨ $-\frac{dq}{dp}$ ਹੋਵੇਗੀ ਕਿਉਂਕਿ ਮੰਗ ਵਕਰ ਘੱਟਦਾ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ (-ve) ਚਿੰਨ੍ਹ ਲਗਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

$\therefore$ ਮੰਗ ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਨ $= -\frac{dq}{dp}$

5.2.2 ਮੰਗ ਦੀ ਲਚਕ

ਅਸੀਂ ਮੰਗ ਦੀ ਲਚਕ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ :

ਮੰਗ ਦੀ ਲਚਕ $= \dfrac{\text{ਵਸਤੂ ਦੀ ਮੰਗ ਵਿੱਚ ਅਨੁਪਾਤਿਕ ਤਬਦੀਲੀ}}{\text{ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਅਨੁਪਾਤਿਕ ਤਬਦੀਲੀ}}$

ਜੇਕਰ $q = f(p)$ ਇੱਕ ਮੰਗ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿਥੇ q ਕਿਸੇ ਚੀਜ਼ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਅਤੇ p ਉਸ ਦੀ ਕੀਮਤ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਮੰਗ ਦੀ ਲਚਕ ਸਾਨੂੰ ਦੱਸਦੀ ਹੈ ਕਿ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਤਬਦੀਲੀ ਆਉਣ ਨਾਲ ਵਸਤੂ ਦੀ ਮੰਗ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਦਰ ਤੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਤਬਦੀਲੀ ਆਉਂਦੀ ਹੈ। ਮੰਗ ਦੀ ਲਚਕ ਨੂੰ μ_d ਜਾਂ e_d ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਮੰਗ ਦੀ ਲਚਕ ਜਾਂ μ_d ਜਾਂ $e_d = \underset{\Delta P \to 0}{Lt} \dfrac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}}$

$$= \underset{\Delta p \to 0}{Lt} \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q}$$

$$e_d = -\frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਚੀਜ਼ ਦੀ ਕੀਮਤ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਮਾਤਰਾ ਵਿੱਚ ਉਲਟ ਸੰਬੰਧ ਹੈ ਇਸ ਲਈ μ_d ਅੱਗੇ ਰਿਣ (-ve) ਚਿੰਨ ਲਗਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਨੋਟ : (i) ਮੰਗ ਦੀ ਢਾਲ $= -\frac{dq}{dp}$ ਹੈ ਜਦਕਿ ਮੰਗ ਦੀ ਲਚਕ $= -\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{pq}$

(ii) ਮੰਗ ਦੀ ਲਚਕ, ਮੰਗ ਵਕਰ ਦੇ ਹਰ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਫਰਕ ਹੋਵੇਟ^{dp}

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਜੇਕਰ ਮੰਗ ਦਾ ਨਿਯਮ $q = 20 - 4p$ ਹੈ ਤਾਂ ਮੰਗ ਦੀ ਢਾਲ ਅਤੇ ਮੰਗ ਦੀ ਲਚਕ ਕੱਢੋ ਜਦੋਂ $p = 3$ ਹੈ।

ਹੱਲ: $q = 20 - 4p$

$$\frac{dq}{dp} = -4, \qquad \text{ਮੰਗ ਦੀ ਢਾਲ } = -\frac{dq}{dp} = 4$$

$$e_d = -\frac{p}{q}.\frac{dq}{dp} = -4 \times -\frac{3}{20-4p} (\therefore p = 3)$$

$$e_d = \frac{12}{20-4\times 3} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1.5$$

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਮੰਗ ਵਕਰਾਂ ਦੀ ਢਾਲ ਅਤੇ ਮੰਗ ਲਚਕ ਕੱਢੋ।

(i) $x = \frac{7}{\sqrt{p}}$ (ii) $x = 7 - 8p$

ਹੱਲ: (i) $x = \frac{7}{\sqrt{p}} = 7p^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{dx}{dp} = 7\frac{d}{dp}p^{-\frac{1}{2}} = -\frac{7}{2}p^{-3/2},$$

$$\text{ਮੰਗ ਦੀ ਢਾਲ } = -\frac{dx}{dp} = \frac{7}{2}p^{-3/2}$$

$$n_d = -\frac{p}{x}.\frac{dx}{dp} = \frac{-p}{7p^{-\frac{1}{2}}}\left[\frac{7}{2}p^{-3/2}\right] = -\frac{1}{2}$$

(ii) $x = 7 - 8p$

$$\therefore \frac{dx}{dp} = -8,$$

$$\text{ਮੰਗ ਦੀ ਢਾਲ } = -\frac{dx}{dp} = 8$$

$$n_d = -\frac{p}{x}.\frac{dx}{dp} = \frac{x-7}{8} \times \frac{1}{x}. -8$$

$$n_d = \frac{x-7}{-x} = \frac{7-x}{x}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਜੇਕਰ ਮੰਗ ਫਲਨ $q = 100 - 2p - 2p^2$ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਮੰਗ ਦੀ ਢਾਲ ਅਤੇ ਮੰਗ ਦੀ ਲਚਕ ਕੱਢੋ ਜਦੋਂ $p = 10$ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ: $q = 100 - 2p - 2p^2$

$$\frac{dq}{dp} = -2 - 4p$$

ਮੰਗ ਦੀ ਢਾਲ $= -\frac{dq}{dp} = 2 + 4p$

ਮੰਗ ਦੀ ਲਚਕ $= -\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}$

$$= -\frac{p}{100 - 2p - 2p^2}(-2 - 4p)$$

$$n_d = -\frac{p(2 + 4p)}{100 - 2p - 2p^2}$$

ਜਦੋਂ p = 10

$$n_d = \frac{10(2 + 40)}{100 - 20 - 2.10^2} = -\frac{420}{120} = -\frac{7}{2}$$

5.2.3 ਪੂਰਤੀ ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਨ

ਜੇਕਰ $q_s = f(p)$ ਪੂਰਤੀ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿਸ ਅਨੁਸਾਰ ਪੂਰਤੀ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਅਤੇ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਸਿੱਧਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਪੂਰਤੀ ਵਕਰ ਦੀ ਢਾਲ $= \frac{dp}{dq_s}$

5.2.4 ਪੂਰਤੀ ਦੀ ਲਚਕ

ਪੂਰਤੀ ਦਾ ਨਿਯਮ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਅਤੇ ਪੂਰਤੀ ਵਿੱਚ ਸਿੱਧਾ ਸੰਬੰਧ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਪੂਰਤੀ ਦੀ ਲਚਕ ਸਾਨੂੰ ਦੱਸਦੀ ਹੈ ਕਿ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਵਿਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਆਉਣ ਨਾਲ ਵਸਤੂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਵਿਚ ਕਿਸ ਦਰ ਤੇ ਤਬਦੀਲੀ ਆਉਂਦੀ ਹੈ।

ਪੂਰਤੀ ਦੀ ਲਚਕ i.e. $\eta_s = \frac{\text{ਵਸਤੂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਵਿੱਚ ਅਨੁਪਾਤਿਕ ਤਬਦੀਲੀ}}{\text{ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਅਨੁਪਾਤਿਕ ਤਬਦੀਲੀ}}$

ਜਾਂ $\eta_s = \frac{dq_s}{dp} \cdot \frac{p}{q_s} = \frac{p}{q_s} \cdot \frac{dq_s}{dp}$

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਜੇਕਰ $q = 10 + 5p^2$ ਇਕ ਪੂਰਤੀ ਫਲਨ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਤੇ n_s ਗਿਆਤ ਕਰੋ ਜਦੋਂ p = 2 ਅਤੇ p = 3.

ਹੱਲ: ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $q = 10 + 5p^2$

$$\therefore \frac{dq}{dp} = \frac{d}{dp}(10 + 5p^2) = 10p$$

$$n_s = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = 10p \cdot \frac{p}{10 + 5p^2} = \frac{10p^2}{10 + 5p^2}$$

ਹੁਣ (i) ਜੇਕਰ p = 2, ਤਾਂ $\eta_s = \frac{10 \times 2^2}{10 + 5 \times 2^2} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3} = 1.33$

(ii) ਜੇਕਰ p = 3, ਤਾਂ

$$\eta_s = \frac{10\times 2^2}{10+5\times 2^2} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3} = 1.33\,,\ \eta_s = \frac{10\times 3^2}{10+5\times 3^2} = \frac{90}{55} = \frac{18}{11} = 1\frac{7}{11} = 1.63$$

5.2.5 ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ ਅਤੇ ਔਸਤ ਆਮਦਨ ਦੀਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ

ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ (Marginal Revenue), ਵਸਤੂ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਜਾਂ ਵਿਕਰੀ ਵਿੱਚ ਆਈ ਤਬਦੀਲੀ ਕਾਰਨ ਕੁਲ ਆਮਦਨ (Total Revenue) ਵਿੱਚ ਆਈ ਤਬਦੀਲੀ ਦੀ ਦਰ ਹੈ।

$\therefore$ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ $(MR) = \frac{d}{dq}(TR) = \frac{d}{dq}(qp)$

$$MR = p\frac{dq}{dq} + q\frac{dp}{dq}$$

ਔਸਤ ਆਮਦਨ (Average Revenue) ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਦਾ ਉਤਪਦਾਨ ਜਾਂ ਵੇਚੀ ਗਈ ਮਾਤਰਾ ਨਾਲ ਅਨੁਪਾਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ (TR) = q × p = ਮਾਤਰਾ × ਕੀਮਤ ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ

$\therefore$ ਔਸਤ ਆਮਦਨ (AR) $= \frac{\text{ਕੁਲ ਆਮਦਨ (TR)}}{\text{ਮਾਤਰਾ}} = \frac{pq}{q} = p.$

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਜੇਕਰ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ $R = 14x - x^2$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਔਸਤ ਆਮਦਨ ਅਤੇ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।
ਹੁਣ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ $R = 14x - x^2$

ਔਸਤ ਆਮਦਨ $= \frac{\text{ਕੁਲ ਆਮਦਨ}}{\text{ਮਾਤਰਾ}} = \frac{14x - x^2}{x} = 14 - x$

ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ $= \frac{d(R)}{dx} = \frac{d\left(14x - x^2\right)}{dx} = 14 - 2x$

5.2.6 ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ ਅਤੇ ਔਸਤ ਲਾਗਤ ਦੀਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ

ਵਸਤੂ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਤੇ ਜੋ ਖਰਚਾ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਉਹ ਉਸ ਦੀ ਲਾਗਤ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਲਾਗਤਾਂ ਤਿੰਨ ਕਿਸਮ ਦੀਆਂ ਹਨ, ਭਾਵ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ, ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ ਅਤੇ ਔਸਤ ਲਾਗਤ।

ਔਸਤ ਲਾਗਤ (AC) $= \frac{\text{ਕੁਲ ਲਾਗਤ (TC)}}{\text{ਉਤਪਾਦਨ ਦੀਆਂ ਇਕਾਈਆਂ}} = \frac{TC}{q}$

ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ $(MC) = \frac{d(TC)}{dq}$

ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਨ ਕਾਰਨ ਆਈ ਤਬਦੀਲੀ ਨੂੰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਜੇਕਰ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ ਫਲਨ $TC = 5 + 6x + 3x^2$ ਹੈ।

ਤਾਂ ਔਸਤ ਲਾਗਤ $= \frac{\text{ਕੁਲ ਲਾਗਤ}}{x} = \frac{5 + 6x + 3x^2}{x}$

$$\therefore AC = \frac{5}{x} + 6 + 3x.$$

ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ $(MC) = \frac{d}{dx}(TC)$

$= \frac{d}{dx}\left(5 + 6x + 3x^2\right)$

$= 6 + 6x.$

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਜੇਕਰ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ ਫਲਨ $TC = x^2 - 6x + 30$ ਹੋਵੇ

ਤਾਂ (i) **ਔਸਤ ਲਗਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ**

(ii) **ਔਸਤ ਲਾਗਤ ਦੀ ਢਾਲ ਕੱਢੋ**

(iii) Verify that AC = MC at minimum point of AC curve.

(i) $AC = \frac{TC}{x}$

$AC = \frac{x^2 - 6x + 30}{x} = x - 6 + \frac{30}{x}$

(ii) $TC = x^2 - 6x + 30$

$MC = \frac{d(TC)}{dx} = \frac{d\left(x^2 - 6x + 30\right)}{dx}$

$= 2x - 6$

Slope of AC curve $= \frac{1}{x}(MC - AC)$

$= \frac{1}{x}\left(2x - 6 - x + 6 - \frac{30}{x}\right)$

$= \frac{1}{x}\left(x - \frac{30}{x}\right)$

(iii) For AC function to be minimum, Slope of AC curve = 0

$\text{Slope} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{30}{x}\right) = 0$

$\Rightarrow x - \frac{30}{x} = 0$

ਜਾਂ $x = \frac{30}{x}$

ਜਾਂ $x^2 = 30$ $\therefore x = \sqrt{30}$ (Output cannot be –ive)

$\therefore AC = x - 6 + \frac{30}{x}$

ਜਦੋਂ $x = \sqrt{30}, AC = \sqrt{30} - 6 + \frac{30}{\sqrt{30}}$

$AC = 2\sqrt{30} - 6$

$MC = 2x - 6$

ਜਦੋਂ $x = \sqrt{30}, MC = 2\sqrt{30} - 6.$

$\therefore$ AC = MC at minimum point of AC curve.

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਲੜੀ ਨੰ. 1

1. Prove that for demand curve $pq^{-a} = b$, where a, b are constants, $n_d = -a$.
2. ਕੁਲ ਲਾਗਤ ਫਲਨ $C = .005x^3 - .02x^2 - 30x + 3000$ ਹੈ।
   (i) ਕੁਲ ਲਾਗਤ ਦੱਸੋ ਜਦੋਂ $x = 4$
   (ii) ਔਸਤ ਲਾਗਤ ਦੱਸੋ ਜਦੋਂ $x = 10$
   (iii) ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ ਦੱਸੋ ਜਦੋਂ $x = 3$
3. The demand for a certain product is represented by the equation $p = 100 - 5q$
   (i) Find the marginal revenue for any output
   (ii) What is MR when q = 0 and q = 4.

5.2.7 ਮੰਗ ਲਚਕ ਅਤੇ ਆਮਦਨ ਧਾਰਨਾਵਾਂ (Elasticity of Demand and Concept of Revenue)

ਆਮਦਨ ਦੀਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਔਸਤ ਆਮਦਨ ਅਤੇ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ, ਮੰਗ ਦੀ ਲਚਕ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਨ।

ਕੁਲ ਆਮਦਨ = ਵਸਤੂ x ਦੀ ਮਾਤਰਾ = p. q

$\therefore$ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ (MR) $= \frac{d\,(\text{ਕੁਲ ਆਮਦਨ})}{dq} = \frac{d(pq)}{dq}$

$$\therefore MR = p + q.\frac{dp}{dq} \text{ ---------------------(i)}$$

(i) ਮੰਗ ਦੀ ਲਚਕ i.e. $\eta_d = -\frac{p}{q}.\frac{dq}{dp}.$

$$\therefore \frac{1}{\eta_d} = -\frac{q}{p}.\frac{dp}{dq}$$

$\therefore$ (i) ਤੋਂ $MR = p\left[1 - \frac{1}{\eta_d}\right]$

(ii) $\therefore AR = \frac{TR}{q} = \frac{pq}{q} = p$

(iii) ਤੋਂ $MR = AR\left[1 - \frac{1}{\eta_d}\right]$

$$\therefore \frac{MR}{AR} = 1 - \frac{1}{\eta_d}$$

$$\therefore \frac{1}{\eta_d} = 1 - \frac{MR}{AR} = \frac{AR - MR}{AR}$$

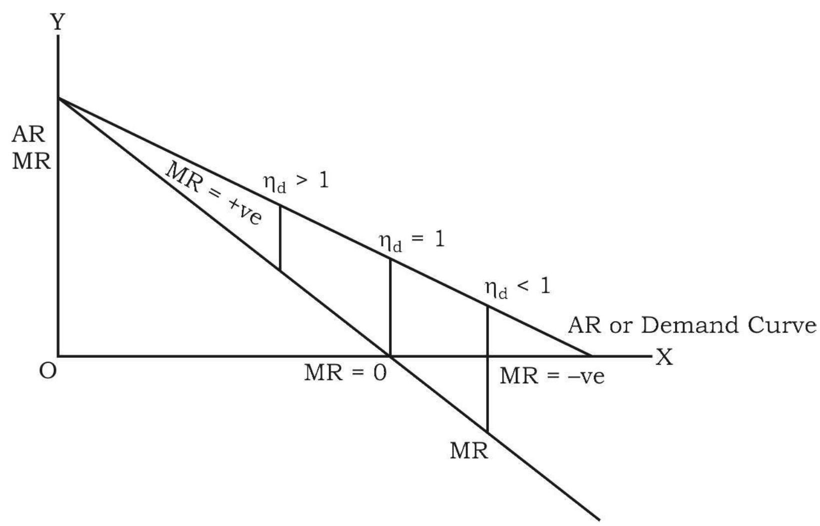
$$\therefore \eta_d = \frac{AR}{AR - MR}$$

(i) ਜੇ MR > 0, ਤਾਂ $\eta_d > 1$

(ii) ਜੇ MR = 0, ਤਾਂ $\eta_d = 1$

(iii) ਜੇ MR < 0, ਤਾਂ $\eta_d < 1$

ਮੰਗ ਲਚਕ ਅਤੇ ਆਮਦਨ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਰਾਹੀਂ ਵੀ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਉਦਾਹਰਣ 8. ਇਕ ਏਕਾਧਿਕਾਰੀ ਦੀ ਮੰਗ ਰੇਖਾ $P = \frac{50 - x}{5}$ ਹੈ।

(i) ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ ਕੱਢੋ।

(ii) ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ਜਦੋਂ x = 0 ਅਤੇ x = 25

ਹੱਲ: ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਮੰਗ ਰੇਖਾ $P = \frac{50 - x}{5}$ ਹੈ।

ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ $R = p.x = \left(\frac{50-x}{5}\right).x = \frac{50x-x^2}{5}$

$\therefore$ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ $(MR) = \frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{50x-x^2}{5}\right) = \frac{1}{5}\frac{d}{dx}\left(50x-x^2\right)$

$MR = \frac{1}{5}(50-2x) = 10 - \frac{2}{5}x$

ਜਦੋਂ x = 0

MR = 10

ਜਦੋਂ x = 25

MR = 10 – 2/5 x 25 = 0.

ਉਦਾਹਰਣ 9. Given the demand function : p = 50 – 3q, show that $E = \frac{AR}{AR-MR}$ at $p = 5$.

ਹੱਲ: ਹੁਣ $p = 50 - 3q$

$\therefore \frac{dp}{dq} = -3$

ਜਾਂ $\frac{dq}{dp} = \frac{1}{-3}$

$E = \frac{p}{q}.\frac{dq}{dp} = \left(-\frac{p}{q}\right)\left(\frac{1}{-3}\right)$

ਜੇਕਰ p = 5,

5 = 50 – 3q $\therefore$ 3q = 45 ਜਾਂ q = 15

$\therefore E = \left(-\frac{p}{q}\right)\left(\frac{1}{-3}\right) = \left(\frac{-5}{15}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$ ....(i)

(i) ਹੁਣ $TR = 50q - 3q^2$

$\therefore TR = 50q - 3q^2$

$\therefore MR = \frac{d(TR)}{dq} = \frac{d}{dq}\left(50q - 3p^2\right) = 50 - 6q$

$\therefore MR = 50 - 6q$

ਜੇਕਰ $q = 15, p = 5$

$\therefore MR = 50 - 6 \times 15 = -40$

AR = Price = 5

$\therefore \frac{AR}{AR-MR} = \frac{5}{5-(-40)} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$ ....(ii)

(ii) (i) ਅਤੇ (ii) ਤੋਂ

$$E = \frac{AR}{AR - MR}$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਲੜੀ ਨੰ. 2

1. ਜੇਕਰ $AR = 400 - 2x - 3x^2$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $\eta = \frac{AR}{AR - MR}$ ਜਦੋਂ $x = 5$ ਹੋਵੇ।

2. ਜਦੋਂ $p = 100 - 5q$ ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਕਿ $\eta = \frac{AR}{AR - MR}$ at $p = 20$.

5.3 ਸਾਰਾਂਸ਼

ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਸਾਧਾਰਣ ਅਵਕਲਜਾਂ ਦੀ ਅਰਥ-ਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਮੰਗ ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਨ ਅਤੇ ਲਚਕ, ਪੂਰਤੀ ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਨ ਅਤੇ ਲਚਕ, ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ, ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤਾਂ ਆਦਿ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਉਦਾਹਰਣ ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

5.4 ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਛੋਟੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) ਮੰਗ ਵਕਰ ਦੀ ਢਾਲ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ ?

(ii) ਪੂਰਤੀ ਦੀ ਲਚਕ ਨੂੰ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਕੇ ਦੱਸੋ ?

(iii) ਔਸਤ ਆਮਦਨ, ਸੀਮਾਤ ਆਮਦਨ ਅਤੇ n_d ਵਿੱਚ ਕੀ ਸੰਬੰਧ ਹੈ ?

(iv) n_d ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $q = 25 - 4p - p^2$ at $p = 5$.

(v) ਜੇਕਰ $P = \frac{50 - x}{5}$ ਇਕ ਮੰਗ ਫਲਨ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ ਕੱਢੋ।

ਵੱਡੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) Find the elasticity of demand and MR at $q = 2$ if the demand function is : $q = 30 - 5p - p^2$.

(ii) Given the demand curve $p = 400 - 2q - 3q^2$, demonstrate the relationship between marginal revenue and elasticity of demand i.e. $MR = (1 - 1/E)$.

(iii) The total cost function of a firm is given by $TC = \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 110x + 50$. Find out fixed cost, variable cost, average total cost and marginal cost.

5.5 ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

1. S.C. Aggarwal and R.K. Rana : Basic Mathematics for Economists.
2. Aggarwal and Joshi : Mathematics for Students of Economics.
3. Bhardwaj and Sabharwal : Mathematics for Students of Economics.
4. Balwant Kandoi : Mathematics for Business and Economics with Applications.

ਪਾਠ ਨੰ: 1.6 ਲੇਖਿਕਾ : ਡਾ. ਵਿਪਲਾ ਚੋਪੜਾ

ਮੈਟਰਿਸਜ਼
(Matrices)

ਰੂਪ ਰੇਖਾ (Structure)

6.0 ਭੂਮਿਕਾ
6.1 ਮੰਤਵ
6.2 ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾ
6.3 ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼
6.3.1 ਮੈਟਰਿਕਸ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ
6.4 ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ
6.5 ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ
6.6 ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਨੂੰ ਸਕੇਲਰ ਦੁਆਰਾ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ
6.7 ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦੀਆਂ ਵੱਖ ਵੱਖ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ
6.7.1 ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦਾ ਜੋੜ
6.7.2 ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦਾ ਘਟਾਉ
6.7.3 ਮੈਟਰਿਜਜ਼ ਦਾ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਗੁਣਾ
6.8 ਸਾਰਾਂਸ਼
6.9 ਪ੍ਰਸ਼ਨ
6.10 ਪੜ੍ਹਨਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

6.0 ਭੂਮਿਕਾ

ਅਰਥ ਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਹੁਣ ਜ਼ਿਆਦਾ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਗਣਿਤ, ਬੀਜ ਗਣਿਤ (Matrix Algebra) ਦਾ ਗਿਆਨ ਹੋਣਾ ਲਾਜ਼ਮੀ ਬਣ ਗਿਆ ਹੈ। ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਗਿਆਨ ਹੋਣਾ ਲਾਜ਼ਮੀ ਬਣ ਗਿਆ ਹੈ। ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਸਮਕਾਲੀਨ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਬਹੁਤ ਆਸਾਨ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਮੈਟਰਿਕਸ ਤੋਂ ਭਾਵ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਇਕ ਆਇਤਕਾਰ ਤਰਤੀਬ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਸਾਡੇ ਪਾਸ ਦੋ ਇਕ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਹਨ :

$3x + 4y - 5z = 3$

$6x - 7y + 2z = 0$

ਦੋਨਾਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰਤੀਬ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

ਉਪਰੋਕਤ 'A' ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਦੀਆਂ ਦੋ ਕਤਾਰਾਂ (rows) ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਕਾਲਮ (Column) ਹਨ।

ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

6.1 ਮੰਤਵ

ਇਸ ਪਾਠ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੰਤਵ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾ, ਕਿਸਮਾਂ, ਵੱਖ ਵੱਖ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਆਦਿ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਹੈ।

6.2 ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾ

"A matrix is an arrangement of mxn numbers consisting of m rows and n columns. The matrix is called matrix of order mxn (read as 'm' by 'n').

ਮੈਟਰਿਕਸ ਤਾਂ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸੈਟ ਨੂੰ ਆਇਤਕਾਰ ਤਰਤੀਬ ਵਿਚ ਲਿਖਣ ਨੂੰ ਹੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇ ਕਰ mxn ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਆਇਤਕਾਰ ਤਰਤੀਬ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸ ਨੂੰ mxn ਮੈਟਰਿਕਸ ਕਹਾਂਗੇ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots\dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots\dots\dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦੀਆਂ m ਪੰਕਤੀਆਂ (rows) ਅਤੇ n ਕਾਲਮ (column) ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ $m\times n$ ਹੈ। ਇਥੇ m ਅਤੇ n ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਿਕ ਪੂਰਨ ਅੰਕ (positive integer) ਹਨ। a_{11}, a_{12}, a_{13}....... ਆਦਿ ਮੈਟਰਿਕਸ 'A' ਦੇ ਅੰਸ਼ ਹਨ। ਕਿਸੇ ਵੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਕਾਲਮ ਦੇ ਅੰਸ਼ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$A = a_{ij},\ 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n$

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 \\ 9 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad D = [0 \quad 1]_{1\times 2}$$

ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਅੰਸ਼ (Diagonal Elements)

ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਅੰਸ਼ ਵਿਕਰਨ ਅੰਸ਼ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $i=j$ ਹੋਵੇ ਅਰਥਾਤ ਅੰਸ਼ a_{11}, a_{22}, a_{33}.......... ਆਦਿ ਵਿਕਰਨ ਅੰਸ਼ ਹਨ।

6.3 ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ :

ਜੇਕਰ ਮੈਟਰਿਕਸ $A = (a_{ij})$ ਇਕ mxn ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮੈਟਰਿਕਸ $B = (b_{ij})$ ਜਿਸ

ਦਾ ਕ੍ਰਮ nxm ਹੋਵੇ, ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। A ਦਾ a_{ij} $(j, i)^{th}$ ਅੰਸ਼ B ਦੇ b_{ij} ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਸੰਕੇਤ ਰੂਪ 'ਚ B=A' ਜਿੱਥੇ A', A ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਟਰਾਸਪੋਜ਼ ਉਸ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਨੂੰ ਕਾਲਮ ਨਾਲ ਬਦਲ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ

ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 4}$ $A' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}_{4\times 2}$

6.3.1 ਮੈਟਰਿਕਸ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ

ਮੈਟਰਿਕਸ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਦੀਆਂ ਮੁੱਖ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ :

(i) $(A')' = A$ ਅਰਥਾਤ ਕਿਸੇ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦੇ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਦਾ ਫਿਰ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਉਹੀ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਹੀ ਹੋਵੇਗੀ।

(ii) $(A+B)' = A' + B'$
ਅਰਥਾਤ ਦੋ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) $(AB)' = B'A'$
ਅਰਥਾਤ ਦੋ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਗੁਣਾ ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਦੇ ਗੁਣਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

6.4 ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ (Equality of Matrices)

ਮੈਟਰਿਸਜ਼ $A = (a_{ij})$.ਅਦ $B = (b_{ij})$ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਪੂਰੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹੋਣ :

(i) ਦੋਨੋ ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਅਰਥਾਤ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਕਾਲਮਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।

(ii) ਦੋਨੋ ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦੇ ਤਦ ਸਥਾਨੀ ਅੰਸ਼ ਇਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਭਾਵ $a_{ij} = b_{ij}$
for all i = 1, 2 .... n ਅਤੇ j = 1, 2, ... m

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

6.5 ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ (Types of Matrices)

1. ਕਤਾਰ ਮੈਟਰਿਕਸ (Row Matrix)

ਜਿਸ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਕੇਵਲ ਇਕ ਹੀ ਕਤਾਰ ਹੋਵੇ ਪਰ ਕਾਲਮਾਂ ਦੀ ਇਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਗਿਣਤੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਕਤਾਰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

$A = (1\ \ 7\ \ 8\ \ 3\ \ 0)_{1\times 5}$

2. ਕਾਲਮ ਮੈਟਰਿਕਸ (Column Matrix)

ਜਿਸ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਕੇਵਲ ਇਕ ਹੀ ਕਾਲਮ ਹੋਵੇ ਪਰ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਇਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਗਿਣਤੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਕਾਲਮ ਮੈਟਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}_{4\times1}$$

3. ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ (Square Matrix)

ਜਿਸ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਕਾਲਮਾਂ ਅਤੇ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$ ਇਹ ਇਕ 2x2 ਦਾ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ।

4. ਆਇਤਕਾਰ ਮੈਟਰਿਕਸ (Rectangular Matrix)

ਕੋਈ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਜੋ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ, ਉਸ ਨੂੰ ਆਇਤਕਾਰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & -1 & +2 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

5. ਵਿਕਰਨ ਮੈਟਰਿਕਸ (Diagonal Matrix)

ਵਿਕਰਨ ਮੈਟਰਿਕਸ ਇਕ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਮੁੱਖ ਵਿਕਰਨ ਅੰਸ਼ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਬਾਕੀ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਸ਼ ਸਿਫਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$B = \text{diag}(b_{11}, b_{22}, b_{33})$ $A = \text{diag}(2, -1, 3)$

6. ਸਕੇਲਰ ਮੈਟਰਿਕਸ (Scalar Matrix)

ਇਕ ਵਿਕਰਨ ਮੈਟਰਿਕਸ ਜਿਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਕਰਨ ਅੰਸ਼ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਸਕੇਲਰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

$A = (a_{ij})$: $a_{ij} = 0$ for $i \neq j$

$a_{ij} = k$ for $i = j$

$A \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{3\times3}$ ਇਕ ਸਕੇਲਰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ।

7. ਇਕਾਈ ਮੈਟਰਿਕਸ (Unit Matrix)

ਇਕ ਸਕੇਲਰ ਮੈਟਰਿਕਸ, ਜਿਸਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਕਰਨ ਅੰਸ਼ ਇਕਾਈ ਜਾਂ ਇਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਉਸਨੂੰ ਇਕਾਈ ਮੈਟਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

$A = (a_{ij})$: $a_{ij} = 0$ for $i \neq j$
$a_{ij} = k$ for $i = j$

$$A\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{3\times3}$$ ਇਕ ਇਕਾਈ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ।

8. ਸਿਫਰ ਜਾਂ ਮਨਸੂਖ ਮੈਟਰਿਕਸ (Zero or Null Matrix)

ਜਿਸ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਹੀ ਅੰਸ਼ ਸਿਫਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਸਿਫਰ ਜਾਂ ਮਨਸੂਖ ਮੈਟਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ

$$A\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{3\times3}$$

9. ਸਮ-ਮਾਪੀ ਮੈਟਰਿਕਸ (Symmetric Matrix)

ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਵਿੱਚੋਂ i ਅਤੇ j ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆ ਕੀਮਤਾਂ ਲਈ $(a_{ij} = -a_{ji})$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਸਰਣਸਮਤਿਯ ਮੈਟਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

$$A = \begin{bmatrix}x & y\\y & x\end{bmatrix}_{2\times2} \qquad B = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 5\\3 & 5 & 6\end{bmatrix}_{3\times3}$$

10. ਸਰਣਸਮਤਿਯ ਮੈਟਰਿਕਸ (Skew-Symmetric Matrix)

ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਵਿੱਚੋਂ i ਅਤੇ j ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆ ਕੀਮਤਾਂ ਲਈ $(a_{ij} = -a_{ij})$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਸਰਣਸਮਤਿਯ ਮੈਟਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

$$A = \begin{bmatrix}0 & 7\\-7 & 0\end{bmatrix}_{2\times2} \qquad B = \begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\2 & 0 & 4\\3 & -4 & 3\end{bmatrix}_{3\times3}$$

11. ਉਪਰਲਾ ਤਿਕੋਨਾ ਮੈਟਰਿਕਸ (Upper Triangular Matrix)

ਇਕ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ $A = (a_{ij})$ ਨੂੰ ਉਪਰਲਾ ਤਿਕੌਨਾ ਮੈਟਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $a_{ij} = 0$ for $i>j$

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots\dots\dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots\dots\dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ਅਰਥਾਤ ਉਪਰਲੇ ਤਿਕੋਨੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਮੁੱਖ ਵਿਕਰਨ ਤੋਂ ਹੇਠਲੇ ਅੰਸ਼ ਸਿਫਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ।

12. ਹੇਠਲਾ ਤਿਕੋਨਾ ਮੈਟਰਿਕਸ (Lower Triangular Matrix)

ਇਕ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ $A = (a_{ij})$ ਨੂੰ ਹੇਠਲਾ ਤਿਕੋਨਾ ਮੈਟਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਮੁੱਖ ਵਿਕਰਨ ਤੋਂ ਉਪਰਲੇ ਅੰਸ਼ ਸਿਫਰ ਹੋਣ ਅਰਥਾਤ $A_{ij} = 0$ for $i < j$

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{ਅਤੇ} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

ਹੇਠਲੇ ਤਿਕੋਨ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ।

13. ਉਪ ਮੈਟਰਿਕਸ (Sub Matrix)

ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਜਾਂ ਕੁਝ ਕਾਲਮਾਂ ਨੂੰ ਹਟਾ ਕੇ ਜਾਂ ਛੱਡ ਕੇ ਜੋ ਮੈਟਰਿਕਸ (ਬਾਕੀ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਤੋਂ) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹੈ, ਉਸ ਨੂੰ ਉਪ ਮੈਟਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 7 \end{bmatrix}$

ਤੱਦ $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$ ਉਪ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹਨ। A_1 ਮੈਟਰਿਕਸ ਵਿੱਚ A ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਦੂਜਾ ਕਾਲਮ ਅਤੇ A_2 ਮੈਟਰਿਕਸ ਵਿੱਚ A ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਤੀਜਾ ਕਾਲਮ ਛੱਡ ਗਏ ਹਨ।

6.6 ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਨੂੰ ਸਕੇਲਰ ਦੁਆਰਾ ਗੁਣਾ

ਮੰਨ ਲਉ $A = (a_{ij})$ ਇਕ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ k ਇਕ ਸਕੇਲਰ ਹੈ। k ਅਤੇ A ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰੀਕੇ ਅਨੁਸਾਰ ਗੁਣਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$kA = k(a_{ij})$

ਅਰਥਾਤ k ਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦੇ ਹਰੇਕ ਅੰਸ਼ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ k = 2

ਤਾਂ $kA = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

6.7 ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦੀਆਂ ਵੱਖ ਵੱਖ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ (Operations of Matrics)

ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦੀਆਂ ਮੁੱਖ ਤਿੰਨ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਅਰਥਾਤ ਜੋੜ, ਘਟਾਓ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂ ਬਾਰੇ ਹੇਠਾਂ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

6.7.1 ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦਾ ਜੋੜ (Addition of Matrics)

ਦੋ (ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ) ਮੈਟਰਿਸ ਨੂੰ ਤਾਂ ਜੋੜਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਦੋਨਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਜਾਂ ਆਕਾਰ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।

ਮੰਨ ਲਵੋ $A = (a_{ij})$ ਅਤੇ $B = (b_{ij})$ ਦੋ ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਬਰਾਬਰ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀਆਂ ਹੁਣ ਤਾਂ A+B ਇਕ ਨਵੀਂ ਮੈਟਰਿਕਸ C = (A+B) ਬਰਾਬਰ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਹੋਵੇਗੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$

ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots\ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \ldots\ldots & b_{2n} \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \ldots\ldots & b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$

ਤਦ $C = A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \ldots\ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \ldots\ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$

ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਜੋੜ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ

(i) ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦਾ ਜੋੜ ਬਦਲਵਾਂ (Commulative) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਰਥਾਤ A+B = B+A

(ii) ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦਾ ਜੋੜ ਸੰਯੋਜਕ (Associative) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਰਥਾਤ ਜੇਕਰ ਤਿੰਨ ਮੈਟਰਿਸਜ਼ A, B ਅਤੇ C ਹੋਣ ਤਾਂ

A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C

ਉਦਾਹਰਣ

ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{\times 3}$

ਤਾਂ $A+B=\begin{bmatrix}1+2 & 2-1 & 3+0\\ 0-4 & 1+5 & -7+1\\ 2+3 & 4+1 & -1+7\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 3\\ -4 & 6 & -6\\ 5 & 5 & 6\end{bmatrix}_{3\times3}$

ਤਾਂ $B+A=\begin{bmatrix}2+1 & -1+2 & 0+3\\ -4+0 & 5+1 & 1-7\\ 3+2 & 1+4 & 7-1\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 3\\ -4 & 6 & -6\\ 5 & 5 & 6\end{bmatrix}_{3\times3}$

A+B = B+A

6.7.2 ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦਾ ਘਟਾਉ (Subtraction of Matrics)

ਦੋ ਮੈਟਰਿਸਜ਼ $A = (a_{ij})$ ਅਤੇ $B = (b_{ij})$ ਦਾ ਅੰਤਰ ਤਾਂ ਹੀ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਦੋਨੋਂ ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦਾ ਆਕਾਰ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ, ਭਾਵ ਦੋਨਾਂ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਇਕੋ ਜਿਹਾ ਹੋਵੇ।

ਜੇਕਰ $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$

ਤਾਂ $C=A-B = (c_{ij})_{m\times n}$

ਉਦਾਹਰਣ :

ਜੇਕਰ $A=\begin{bmatrix}x & y\\ z & y\end{bmatrix}_{2\times2}$ $B=\begin{bmatrix}y & x\\ y & y\end{bmatrix}_{2\times2}$

$$A-B=\begin{bmatrix}x-y & y-x\\ z-y & 0\end{bmatrix}_{2\times2}$$

ਉਦਾਹਰਣ :

ਜੇਕਰ $X=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 2\end{bmatrix}$, $Z=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

4x + 5y - 3z ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

$$4X=4\begin{bmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 16\\ 16 & 4\end{bmatrix}$$

$$5Y=5\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 25\\ 25 & 10\end{bmatrix}$$

$$3Z=3\begin{bmatrix}3 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 9\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $4x + 5y - 3z = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 16 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 25 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 41 \\ 41 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 32 \\ 38 & 14 \end{bmatrix}$$

6.7.3 ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦਾ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਗੁਣਾਂ :

ਦੋ (ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ) ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਗੁਣਾ ਤਾਂ ਹੀ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਹ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਗੁਣਾਂ ਹੋ ਸਕਣ ਦੇ ਯੋਗ (Comformable) ਹੋਣ। ਅਰਥਾਤ ਪਹਿਲੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਕਾਲਮਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੂਜੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣੀ ਲਾਜ਼ਮੀ ਹੈ। ਅਜਿਹਾ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੋਵਾਂ ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਗੁਣਾਂ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ।

ਜੇਕਰ $(a_{ij})_{m\times n}$ ਅਤੇ $(b_{jk})_{n\times k}$

ਜਿਥੇ

$i = 1,2,\ldots\ldots\ldots m, \quad j=1,2,\ldots\ldots\ldots n$

$j = 1,2,\ldots\ldots\ldots n, \quad k=1,2,\ldots\ldots\ldots k$

ਤਾਂ ਮੈਟਰਿਸਜ਼ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਆਪਸ 'ਚ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਇਕ ਨਵਾਂ ਮੈਟਰਿਕਸ਼ C = AB ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ ਜਿਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ m×n ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ

ਜੇਕਰ $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ ਅਤੇ $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}_{3\times 1}$

ਇਥੇ A, 2×3 ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ B, 3×1 ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ ਇਸ ਲਈ AB ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਦਕਿ BA ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$AB = \begin{bmatrix} 3\times 7 + 4\times 8 + 0\times -9 \\ 5\times 7 + 6\times 8 + 1\times -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21+32+0 \\ 35+48-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 \\ 74 \end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਣ :

ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

ਸਿੱਧ ਕਰੋ $AB \neq BA$

ਹੱਲ :

$$AB = \begin{bmatrix} (1\times 2)+(-2\times 4)+(3\times 2) & (1\times 3)+(-2\times 5)+(3\times 1) \\ (-4\times 2)+(2\times 4)+(5\times 2) & (-4\times 3)+(2\times 5)+(5\times 1) \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$BA = \begin{bmatrix} (2\times 1)+(3\times -4) & (2\times -2)+(3\times 2) & (2\times 3)+(3\times 5) \\ (4\times 1)+(5\times -4) & (4\times -2)+(5\times 2) & (4\times 3)+(5\times 5) \\ (2\times 1)+(1\times -4) & (2\times -2)+(1\times 2) & (2\times 3)+(1\times 5) \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -10 & 2 & 21 \\ -16 & 2 & 37 \\ -2 & -2 & 11 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\therefore AB \neq BA$$

ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਗੁਣਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ :

1. ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦਾ ਗੁਣਾਂ ਹਮੇਸ਼ਾ commutative ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ AB=BA ਜਾਂ AB≠BA
2. ਜੇਕਰ (AB)C=A(BC) ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸੰਯੋਜਕ ਨਿਯਮ (Associative Law) ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
3. ਵਿਤਰਣ ਨਿਯਮ (Distributive Law) ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਹਾਲਤਾਂ ਤੇ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :
   (a) A (B+C) = AB + AC
   (b) (B+C) A = BA + CA

ਉਦਾਹਰਣ :

ਜੇਕਰ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

ਸਿੱਧ ਕਰੋ : (i) A(BC) = (AB)C
(ii) (ABC)' = C'B'A'

ਹੱਲ :

(i) $$BC = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 11 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 28 & 11 \\ 16 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 31 \\ 104 & 52 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 13 & 13 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 13 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 60 & 31 \\ 104 & 52 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

$\therefore$ (i) ਅਤੇ (ii) ਤੋਂ A(BC) = (AB)C

(ii) ਹੁਣ $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B^1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, C^1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$C^1B^1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 16 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$$

$$C^1B^1A^1 = \begin{pmatrix} 28 & 16 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 104 \\ 31 & 52 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(iii)}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 13 & 13 \end{pmatrix}$$

$$ABC = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 13 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 31 \\ 104 & 52 \end{pmatrix}$$

$$(ABC)^1 = \begin{pmatrix} 60 & 104 \\ 31 & 52 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(iv)}$$

(iii) ਅਤੇ (iv) ਤੋਂ $(ABC)^1 = C^1B^1A^1$

6.8 ਸਾਰਾਂਸ਼ :

ਇਸ ਪਾਠ ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾ, ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ ਅਤੇ ਮੁੱਖ ਕਿਸਮਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਿੱਤੀ ਹੈ। ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਮੁੱਖ ਤਿੰਨ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਅਰਥਾਤ ਜੋੜ, ਘਟਾਉ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਬਾਰੇ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

6.9 ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਛੋਟੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਮੈਟਰਿਕਸ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ?
2. ਸਮ-ਮਾਪੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਕੇ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ ?
3. ਉਪਰਲਾ ਤਿਕੋਨਾ ਮੈਟਰਿਕਸ ਅਤੇ ਹੇਠਲਾ ਤਿਕੋਨਾ ਮੈਟਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਫਰਕ ਦੱਸੋ?
4. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ A ਕਿਸ ਕਿਸਮ ਦੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ ?

5. i ɓo $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ 5A ਦਾ ਮੁੱਲ ਦੱਸੋ।

ਵੱਡੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ :

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 10 & -4 & -1 \\ -11 & 5 & 6 \\ 9 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ AB=BA

2. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(AB)^1 = B^1A^1$

3. ਜੇਕਰ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $A^3\text{-}2A^2\text{-}9A=0$

ਪਰ $A^2\text{-}2A\text{-}9I = 10$

4. ਜੇਕਰ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

ਪਤਾ ਕਰੋ (i) A^1+B^1
(ii) $(A+B)^1$
(iii) A^1B^1

5. ਜੇਕਰ $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ (i) A(B-C) = AB-AC
(ii) A(BC) = (AB)C

6.10 ਪੜ੍ਹਨਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ:

1. Bhardwaj and Sabharwal : Mathematics of Students of Economics
2. Aggarwal and Joshi : Mathematics for Students of Economics
3. S.C. Srivastava & Smt. S. Srivastava : Quantitative Techniques
4. S.C. Aggarwal & R.K. Rana : Basic Mathematics for Economists

ਪਾਠ ਨੰ: 1.7 | ਲੇਖਿਕਾ : ਡਾ. ਵਿਪਲਾ ਚੋਪੜਾ

ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦਾ ਐਡਜਾਇੰਟ ਅਤੇ ਵਿਪਰੀਤ
(Adjoint and Inverse of Matrix)

ਰੂਪ ਰੇਖਾ (Structure)

7.0 ਭੂਮਿਕਾ
7.1 ਮੰਤਵ
7.2 ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਿਕ
7.3 ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੇ ਗੁਣ
7.4 ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਐਡਜਾਇੰਟ
7.5 ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ
7.6 ਮੈਟਰਿਕਸ ਵਿਪਰੀਤ ਦਾ ਗੁਣ
7.7 ਸਾਰਾਸ਼
7.8 ਪ੍ਰਸ਼ਨ
7.9 ਪੜ੍ਹਨਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

7.0 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਿਛਲੇ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਮਤਲਬ ਇਸ ਦੀਆਂ ਮੁੱਖ ਕਿਸਮਾਂ ਅਤੇ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਲਈ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਐਡਜਾਇੰਟ ਅਤੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਨਿਰਧਾਰਕ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ। ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਬਾਰੇ ਵਿਸਤਰਿਤ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ।

7.1 ਮੰਤਵ

ਇਸ ਪਾਠ ਦੇ ਮੁੱਖ ਮੰਤਵ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ :

ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਕ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

ਨਿਰਧਾਰਕ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ।

ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਐਡਜਾਇੰਟ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ।

ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ।

7.2 ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਿਕ (Determinant of a Matrix)

ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਤੋਂ ਭਾਵ ਉਹ ਸਕੇਲਰ ਅੰਕ ਹੈ ਜੋ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ ਨਾਲ ਜੁੜਿਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

"A determinant is a number associated to a square matrix."

ਜੇਕਰ A ਇਕ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਰਾਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

det A ਜਾਂ $|A|$

ਅਰਥਾਤ ਮੈਟਰਿਕਸ ਨੂੰ ਦੋ ਸਿੱਧੀਆਂ-ਖੜ੍ਹਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਨੋਟ : ਨਿਰਧਾਰਕ ਕੇਵਲ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਹੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਕ ਕ੍ਰਮ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਿਕ

ਜੇਕਰ $A = [a_{11}]_{1\times1}$ ਇੱਕ 1×1 ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੋਵੇ ਤਾਂ det A ਜਾਂ $|A| = |a_{11}| = a_{11}$

2×2 ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਿਕ

ਮੰਨ ਲਉ ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times2}$ ਇਕ 2×2 ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਨੂੰ det A/|A| ਸੰਕੇਤਾਂ ਰਾਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

2×2 ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦੀ ਵਿਧੀ ਹੇਠਾਂ ਦੱਸੀ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ

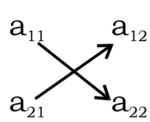
ਹੁਣ $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

ਤਾਂ |A| ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

ਇਸ ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪੜਾਅ ਹਨ:

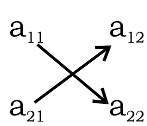
ਪੜਾਅ 1

ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰੀਕੇ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖੋ।



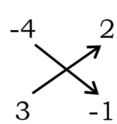
ਪੜਾਅ 2

ਤੀਰਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਦਿਖਾਏ ਗਏ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ 'ਚ ਗੁਣਾਂ ਕਰ ਦਿਉ ਭਾਵ a_{11} ਨੂੰ a_{21} ਨਾਲ।



ਜੋ ਤੀਰ ਨੀਚੇ ਵੱਲ ਨੂੰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾਲ + (ਜਮ੍ਹਾਂ) ਦਾ, ਅਤੇ ਜੋ ਤੀਰ ਉਪਰ ਵੱਲ ਨੂੰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਉਸ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਨਫੱਲ ਨਾਲ - (ਮਨਫੀ) ਦਾ ਨਿਸ਼ਾਨ ਲਾ ਲਓ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਡੇ ਪਾਸ ਇਕ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਭਾਵ $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ਜੋ ਕਿ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ |A| =



$\therefore$ |A| = (-4)(-1) -(3)(2) = 4 - 6 = -2

ਤੀਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ :

ਜੇਕਰ ਮੈਟਰਿਕਸ 3×3 ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਦੂਸਰੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ

ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

ਤਾਂ $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$|A|$ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪੰਕਤੀ ਜਾਂ ਕਾਲਮ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{12}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

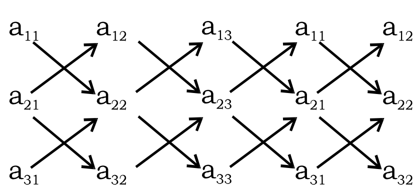
$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (1-1) + 1(-1-1) - (1+1)$$
$$= 0 - 2 - 2 = -4$$

ਸਿੱਧਾ ਤਰੀਕਾ ਜਾਂ ਸਾਰਸ ਚਿੱਤਰ (Direct Method/Sarrus Diagram)

ਤੀਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ ਇਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਵੀ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਸਿੱਧਾ ਤਰੀਕਾ ਜਾਂ ਸਾਰਸ ਚਿੱਤਰ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

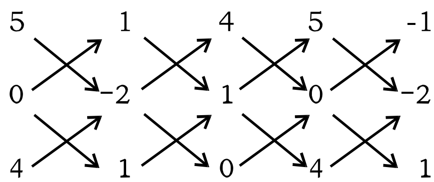


ਤਰੀਕਾ : ਉਪਰ ਜਾਂਦੇ ਤੀਰ - (ਘਟਾਉ) ਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਨੀਚੇ ਆਉਂਦੇ ਤੀਰ + (ਜਮ੍ਹਾਂ) ਦੇ ਹਨ।

ਇਹ ਨਿਯਮ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਤਿੰਨ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਤੇ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



= 0 - 4 + 0 + 32 - 5 + 0 = 23

ਜਾਂ

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

= 4(0-1) + 1(0-4) + (0+8)

= -5 -4 + 32 = 23

7.3 ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੇ ਗੁਣ (Properties of Determinants)

ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੇ ਕੁੱਝ ਗੁਣ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦੱਸਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

1. ਕਿਸੇ ਵੀ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਕਾਲਮਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ 'ਚ ਬਦਲਣ (ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਟਰਾਸਪੋਜ) ਨਾਲ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੇ ਮੁੱਲ ਤੇ ਕੋਈ ਅਸਰ ਨਹੀਂ ਪੈਂਦਾ ਅਰਥਾਤ $|A| = |A'|$

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 2 - 3 \times 5 = 8 - 15 = -7$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 2 - 5 \times 3 = 8 - 15 = -7$$

2. ਜੇ ਕਿਸੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੀਆਂ ਦੋ ਪੰਕਤੀਆਂ (ਜਾਂ ਦੋ ਕਾਲਮ) ਆਪਸ 'ਚ ਬਦਲੀਆਂ (interchanged) ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਤਾਂ ਵੀ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੀ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਕੀਮਤ ਤੇ ਕੋਈ ਅਸਰ ਨਹੀਂ ਪੈਂਦਾ ਪਰ ਉਸ ਦਾ ਗਣਿਤਿਕ ਨਿਸ਼ਾਨ ਜ਼ਰੂਰ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$$

3. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਕਿਸੇ ਇਕ ਪੰਕਤੀ (ਜਾਂ ਕਾਲਮ) ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਸਕੇਲਰ (Scalar) K ਗੁਣਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਵੀ K ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

4. ਜੇ ਕਿਸੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਇਕ ਪੰਕਤੀ (ਜਾਂ ਕਾਲਮ) ਸਿਫਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਸਿਫਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

5. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੀ ਕਿਸੇ ਪੰਕਤੀ (ਜਾਂ ਕਾਲਮ) ਨੂੰ P ਸਥਾਨਾਂ ਤੇ ਹੇਠਾਂ ਜਾਂ ਉਪਰ (ਜਾਂ ਸੱਜੇ ਜਾਂ ਖੱਬੇ) ਸਰਕਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੀ ਕੀਮਤ ਤਾਂ ਉਨੀ ਹੀ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਗਣਿਤਿਕ ਨਿਸ਼ਾਨੀ ਵੀ ਉਹੀ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ P ਜਿਸਤ (even) ਹੋਵੇ। ਪਰ ਗਣਿਤਿਕ ਨਿਸ਼ਾਨੀ ਬਦਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ P ਟਾਂਕ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

ਹੁਣ ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਅਤੇ ਤੀਜੀ ਪੰਕਤੀ ਦੀ ਥਾਂ ਬਦਲੀ ਕਰਨ ਤੇ

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

6. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਦੋ ਪੰਕਤੀਆਂ (ਜਾਂ ਕਾਲਮਾਂ) ਇੰਨ ਬਿੰਨ ਜਿਹੀਆਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

7. ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਇਕ ਪੰਕਤੀ (ਜਾਂ ਕਾਲਮ) ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਦੂਜੀ ਪੰਕਤੀ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਜੋੜਨ (ਘਟਾਉਣ) ਤੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$$

ਹੁਣ ਦੂਜੀ ਪੰਕਤੀ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਦਿਓ

$$\begin{vmatrix} 2+6 & 1+8 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 27 = 5$$

8. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਇਕ ਪੰਕਤੀ (ਜਾਂ ਇਕ ਕਾਲਮ) ਕਿਸੇ ਦੂਸਰੀ ਪੰਕਤੀ (ਜਾਂ ਕਾਲਮ) ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਿਫਰ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 8 & -4 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

7.4 ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਐਡਜਾਇੰਟ (Adjoint of Matrix)

ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ, ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਅਤੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਐਡਜਾਇੰਟ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

ਐਡਜਾਇੰਟ A ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੇ ਸਹਿ-ਪੰਡਾਂ (Co-factor) ਤੋਂ ਬਣੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼। ਇਸ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots\dots & a_{mm} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦੇ ਹਰੇਕ ਅੰਸ਼ (a_{ij}) ਦੀ ਸਹਿ-ਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਸੰਕੇਤਾਂ ਰਾਹੀਂ ਅਸੀਂ (c_{ij}) ਨਾਲ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। a_{ij} ਨੂੰ c_{ij} ਨਾਲ ਬਦਲ ਕੇ ਸਹਿ-ਖੰਡਾਂ ਦਾ ਇਕ ਮੈਟਰਿਕਸ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ $C = (c_{ij})$ ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। C ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ $(C)^1$ ਦੀ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦਾ ਐਡਜਾਇੰਟ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

$$\text{AdjA} = C^1 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots\cdots\cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots\cdots\cdots & c_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots\cdots\cdots & c_{mn} \end{bmatrix}^1_{m\times n}$$

$$\text{AdjA} = C^1 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots\cdots & c_{m1} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots\cdots & c_{m2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots\cdots & c_{mn} \end{bmatrix}^1_{m\times n}$$

ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ 'ਲਘੂ' (Minor of Matrix) ਅਤੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਸਹਿ-ਖੰਡ (Co-factor of Matrix) :

ਮੈਟਰਿਕਸ ਬੀਜ-ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ 'ਲਘੂ' ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਮੈਟਰਿਕਸ 'ਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਛੋਟਾ ਮੈਟਰਿਕਸ। ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਹਰ ਅੰਸ਼ ਦਾ ਇਕ ਲਘੂ ਮੈਟਰਿਕਸ (ਨਿਰਧਾਰਕ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਉਸ ਪੰਕਤੀ ਤੇ ਕਾਲਮ ਨੂੰ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਸ ਅੰਸ਼ ਮੌਜੂਦ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਛੱਡ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ਜੇਕਰ

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ 9 ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੇ 9 'ਲਘੂ' ਹੋਣਗੇ। ਜਿਵੇਂ a_{ij} ਦੇ ਲਘੂ ਨੂੰ M_{ij} ਨਾਲ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

a_{11} ਦਾ ਲਘੂ (Minor) $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

a_{12} ਦਾ ਲਘੂ (Minor) $M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

a_{13} ਦਾ ਲਘੂ (Minor) $M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

a_{21} ਦਾ ਲਘੂ (Minor) $M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

a_{22} ਦਾ ਲਘੂ (Minor) $M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਾਕੀ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੇ 'ਲਘੂ' ਨਿਰਧਾਰਤ ਦਿਖਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਸਹਿ-ਖੰਡ (Co-factor)

ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅੰਸ਼ (a_{ij}) ਦਾ ਸਹਿ-ਖੰਡ ਉਸ ਅੰਸ਼ ਦਾ ਪੂਰਵ 'ਲਘੂ' ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਢੁਕਵਾਂ ਜਮ੍ਹਾਂ ਜਾਂ ਮਨਫੀ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਲਗਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ a_{ij} ਦਾ ਸਹਿ-ਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ a_{ij} ਦੇ ਲਘੂ ਨੂੰ $(-1)^{i+j}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ a_{ij} ਦਾ ਸਹਿ-ਖੰਡ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$Aij = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

ਜਿੱਥੇ i ਅਤੇ j ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪੰਕਤੀ ਅਤੇ ਕਾਲਮ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A_{11}| = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A_{12}| = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A_{13}| = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A_{21}| = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਾਕੀ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੇ 'ਸਹਿ-ਖੰਡ' ਦਿਖਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।
ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

ਜੇਕਰ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

A ਦਾ ਐਡਜਾਇੰਟ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਹਰ ਅੰਸ਼ ਦੇ 'ਸਹਿ-ਖੰਡ' ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ।

ਹੁਣ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1-0) = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2-0) = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = +(4-3) = 1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(0-4) = +4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = +(1-6) = -5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2-0) = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0-2) = -2$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{vmatrix}=-(0-4)=+4$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{vmatrix}=(1-0)=1$$

$$\text{Adj}A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\4 & -5 & -2\\-2 & 4 & 1\end{bmatrix}^T$$

$$\text{Adj}A=\begin{bmatrix}1 & 4 & -2\\-2 & -5 & 4\\1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

7.5 wNfoe; dk ft gohs **(Inverse of Matrix)**

ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਬਹੁਵਾਚੀ (Non-Singular) ਹੋਵੇ ਅਰਥਾਤ $|A|\neq 0$, ਤਾਂ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦੇ ਵਿਰਪੀਤ ਨੂੰ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਤ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ A ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ A^{-1} ਚਿੰਨ੍ਹ ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$A^{-1}=\frac{|\text{adj}A|}{|A|},\quad |A|\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{\text{ਸਹਿ-ਖੰਡ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼}}{|A|}$$

ਉਪਰ 7.2 ਅਤੇ 7.4 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਐਡਜਾਇੰਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਿੱਤੀ ਸੀ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

ਜੇਕਰ $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\5 & 1 & 0\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ ਤਾਂ A^{-1} ਪਤਾ ਕਰੋ।

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\5 & 1 & 0\\0 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

$|A| = 2(3-0)-0(15-0)+(-1)(5-0) = 6-5 = 1 \neq 0$

ਹੁਣ $A^{-1} = \frac{Adj A}{|A|}$

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

ਜਿਥੇ A_{11} = 2 ਦਾ ਸਹਿ-ਖੰਡ = $(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3$

A_{12} = 0 ਦਾ ਸਹਿ-ਖੰਡ = $(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -15$

A_{13} = -1 ਦਾ ਸਹਿ-ਖੰਡ = $(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$

A_{21} = 5 ਦਾ ਸਹਿ-ਖੰਡ = $(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$

A_{22} = 1 ਦਾ ਸਹਿ-ਖੰਡ = $(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$

A_{23} = 0 ਦਾ ਸਹਿ-ਖੰਡ = $(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$

A_{31} = 0 ਦਾ ਸਹਿ-ਖੰਡ = $(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

A_{32} = 1 ਦਾ ਸਹਿ-ਖੰਡ = $(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5$

A_{33} = 3 ਦਾ ਸਹਿ-ਖੰਡ = $(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$$\text{AdjA}=\begin{bmatrix}3 & -15 & 5\\ -1 & 6 & -2\\ 1 & -5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -15 & 6 & -5\\ 5 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

ਅਤੇ $$A^{-1}=\frac{\text{AdjA}}{|A|}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -15 & 6 & -5\\ 5 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -15 & 6 & -5\\ 5 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

7.6 ਮੈਟਰਿਕਸ ਵਿਪਰੀਤ ਦੇ ਗੁਣ

ਮੈਟਰਿਕਸ ਵਿਪਰੀਤ ਦੇ ਮੁੱਖ ਗੁਣ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ;

1. ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਹੋਂਦ ’ਚ ਹੋਵੇ, ਵਿਪਰੀਤ ਇਕੋ ਇਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   ਫਰਜ਼ ਕਰੋ ਕਿ A ਇਕ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ B ਅਤੇ C ਇਸ ਦੇ ਦੋ ਵਿਪਰੀਤ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹਨ।
   ਕਿਉਂਕਿ B, A ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਹੈ AB=BA=I ....(i)
   ਜੇਕਰ C ਵੀ A ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਹੈ AC=CA=I ....(ii)
   ਹੁਣ ਕਿਉਂਕਿ A,B,C ਸਾਰੇ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਗੁਣਨਫਲ CAB ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
   ਹੁਣ CAB=C(AB) = CI = C ....(iii)
   CAB=(CA)B = IB = B ....(iv)
   (iii) ਅਤੇ (iv) ਤੋਂ C = B
2. ਦੋ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਉਨ੍ਹਾ ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਵਿਪਰੀਤਾਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਰਥਾਤ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਟਰਾਂਸਪੋਜ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਉਸ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਵਿਪਰੀਤ ਦੇ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। $(A^{1})^{-1} = (A^{-1})^{1}$
4. ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਵਿਪਰੀਤ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਉਹੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ : ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\\ 3 & 1 & -2\\ -1 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

$$|A|=2\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & -4\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3 & -2\\ -1 & -4\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}$$

$|A| = -8 + 3(-12-2) + 0 = -8-42 = -50$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -2\\0 & -4\end{vmatrix} = -4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & -2\\-1 & -4\end{vmatrix} = -(-12-2)=14$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\-1 & 0\end{vmatrix} = (0+1)=1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-3 & 0\\0 & -4\end{vmatrix} = -(12)= -12$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & -3\\-1 & -4\end{vmatrix} = (-8)=-8$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & -3\\-1 & 0\end{vmatrix} = -(0-3)=+3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3 & 0\\1 & -2\end{vmatrix} = 6$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 0\\3 & -2\end{vmatrix} = -(-4)=+4$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & -3\\3 & 1\end{vmatrix} = +(2+9)=11$$

$$\text{Adj}A = \begin{bmatrix}-4 & 14 & 1\\-12 & -8 & 3\\6 & 4 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-4 & -12 & 6\\14 & -8 & 4\\1 & 3 & 11\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{AdjA}}{|A|} = \frac{-1}{50} = \begin{bmatrix} -4 & -12 & 6 \\ 14 & -8 & 4 \\ 1 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

7.7 ਸਾਰਾਂਸ਼

ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਗੁਣਾਂ ਬਾਰੇ, ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਐਡਜਾਇੰਟ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਿੱਤੀ ਹੈ। ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਇਸ ਦੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਅਤੇ ਐਡਜ਼ਾਇੰਟ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਹੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਦੱਸੀ ਗਈ ਹੈ।

7.8 ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਛੋਟੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਮੈਟਰਿਕਸ ਅਤੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਦੱਸੋ।
2. ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਲਘੂ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ।
3. ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਸਹਿ ਖੰਡ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ।
4. ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਵਿਪਰੀਤ ਗੁਣਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਿਓ।
5. A^{-1} ਕੀ ਹੈ?

ਵੱਡੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} a & 0 & -a \\ a & 2a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} a & -a & 0 \\ 0 & 2a & a \\ a & 0 & 4a \end{bmatrix}$

   ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ (i) $(A^{-1})^{-1} = A$ (ii) $(B^{-1})^{-1} = B$ (iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ (ii) $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

   (iii) $C = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 5 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$
3. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਲਈ ਸਿੱਧ ਕਰੋ

   $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

(i) $A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

4. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦੇ ਐਡਜਾਇੰਟ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (ii) $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

5. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਜੇਕਰ

$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ $A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

7.9 ਪੜ੍ਹਨਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

1. Quantitative Techniques : S.C. Srivastava and Smt. S. Srivastava
2. Basic Mathematics for Economists : Dr. S.C. Aggarwal and Dr. R.K. Rana

ਪਾਠ ਨੰ: 1.8   ਲੇਖਿਕਾ :ਡਾ. ਵਿਪਲਾ ਚੋਪੜਾ

ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦਾ ਹੱਲ
(Solution of Simultaneous Equations)

ਰੂਪ-ਰੇਖਾ (Structure)

8.0 ਭੂਮਿਕਾ
8.1 ਮੰਤਵ
8.2 ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਤਰੀਕੇ
8.2.1 ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦਾ ਤਰੀਕਾ (Matrix Inverse Method)
8.2.2 ਕਰੈਮਰ ਨਿਯਮ (Crammer's Rule)
8.3 ਸਾਰਾਸ਼
8.4 ਪ੍ਰਸ਼ਨ
8.4.1 ਛੋਟੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ
8.4.2 ਲੰਮੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ
8.5 ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

8.0 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਾਠ ਨੰ; 4 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੈਟਰਿਸ਼ਜ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਲਈ ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਅਤੇ ਨਿਰਧਾਰਕ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਵੀ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਸਾਡੇ ਪਾਸ ਦੋ ਨਾਂ ਮਾਲੂਮ ਚਰਾਂ ਲਈ ਦੋ ਸਮਕਾਲੀ ਲੀਨਿਅਰ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਹਨ

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \text{ ....(i)}$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \text{ ....(ii)}$$

(i) ਅਤੇ (ii) ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। (i) ਅਤੇ (ii) together are called simultaneous equations as there will be only one pair of values satisfying both the equations simultaneously).

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਤਿੰਨ ਨਾਂ ਮਾਲੂਮ ਚਰਾਂ ਲਈ ਤਿੰਨ ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 = b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 = b_2$$

$$a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 = b_3$$

X_1, X_2, X_3 ਦੇ ਮੁੱਲ ਜੇ ਇਕੋ ਸਮੇਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਦੇ ਹਨ ਉਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਆਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁਣ n ਨਾ-ਮਾਲੂਮ ਚਰਾਂ ਲਈ ਸਮਕਾਲੀ ਲੀਨਿਅਰ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \text{ --------- } + a_{11} X_n = b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \text{ --------- } + a_{2n} X_n = b_2$$

$$a_{n1} X_1 + a_{n2} X_2 + \text{ --------- } + a_{nn} X_n = b_n$$

$X_1, X_2, X_3 ----x_n$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਜੋ ਇਕੋ ਸਮੇਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਦੇ ਹਨ ਉਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਆਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

8.1 ਮੰਤਵ : ਇਸ ਪਾਠ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੰਤਵ ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਹੈ।

8.2 ਸਮਕਾਲੀ ਲੀਨਿਅਰ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਤਰੀਕੇ :

ਸਮਕਾਲੀ ਲੀਨਿਅਰ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰੀਕੇ ਹਨ :

(ੳ) ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦਾ ਤਰੀਕਾ (Matrix Inverse Method)

(ਅ) ਕਰੈਮਰ ਨਿਯਮ (Crammer's Rule)

8.2.1 ਮੈਟਰਿਸ ਉਲਟ ਦਾ ਤਰੀਕਾਂ

ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ ਸਾਡੇ ਪਾਸ ਤਿੰਨ ਲੀਨਿਅਰ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਹੈ, ਅਰਥਾਤ X_1, X_2 ਅਤੇ X_3 ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 = b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 = b_2$$

$$a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 = b_3$$

ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

A X = B

ਜਿਥੇ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \times = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

ਜੇਕਰ $|A| \neq 0$ ਤਾਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਤਰੀਕੇ ਰਾਹੀਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$X = A^{-1} B$, ਜਿਥੇ A^{-1} ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ।

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}\, A}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^T}{|A|}$$ ਜਿੱਥੇ $A_{11}\ A_{12}\ A_{13}$ .... cofactors ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$$5x_1 + 4x_2 = 26$$

$$2x_1 + 7x_2 = 32$$

ਹੱਲ : ਹੁਣ $5x_1 + 4x_2 = 26$ ਦੋ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਹਨ।

$$2x_1 + 7x_2 = 32$$

ਜੇਕਰ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਲਿਖੀਏ ਤਾਂ $A\,X = B$

ਜਿਥੇ $A=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 2 & 7\end{bmatrix}, \times=\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}26\\ 32\end{bmatrix}$

$$AX=B$$

ਜਾਂ $X=A^{-1}B$

$$A^{-1}=\frac{\text{Adj}\,A}{|A|}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & 4\\ 2 & 7\end{vmatrix}=35-8=27$$

$$\text{Adj}\,A=\begin{bmatrix}7 & -2\\ -4 & 5\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}7 & -4\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{\text{Adj}\,A}{|A|}, |A|\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}7 & -4\\ -2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{27} & \frac{-4}{27}\\ \frac{-2}{27} & \frac{5}{27}\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}\frac{7}{27} & \frac{-4}{27}\\ \frac{-2}{27} & \frac{5}{27}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}26\\ 32\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{182}{27} & -\frac{128}{27}\\ \frac{-52}{27} & +\frac{160}{27}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}$$

Hence $x_1=2$ ਅਤੇ $x_2=4$

Check Substituting these values in the original equations

5 (2) + 4 (4) = 26

2 (2) + 7 (4) = 32

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$2x+3y=7$

$4x+2y=10$

ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਲਿਖੋ।

$AX = B$ ਜਿਥੇ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \times = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $|A| = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 12 = -8$

ਕਿਉਂਕਿ $|A| \neq 0$ ਅਸੀਂ A^{-1} ਦਾ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}\,A}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}}{|A|}$$

$A_{11} = a_{11}$ ਤੱਤ ਦਾ ਕੋਫੈਕਟਰ $= (-1)^{1+1}(2) = 2$

$A_{12} = a_{12}$ ਤੱਤ ਦਾ ਕੋਫੈਕਟਰ $= (-1)^{1+2}(4) = -4$

$A_{21} = a_{21}$ ਤੱਤ ਦਾ ਕੋਫੈਕਟਰ $= (-1)^{2+1}(+3) = -3$

$A_{22} = a_{22}$ ਤੱਤ ਦਾ ਕੋਫੈਕਟਰ $= (-1)^{2+2}(2) = 2$

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}}{-8} \quad = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{4} & +\frac{30}{8} \\ \frac{7}{2} & -\frac{10}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = 2, y = 1$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$x - 2y + 3z = 1$
$2x + y - 2z = -1$
$3x - y - 4z = -5$

ਹੱਲ :

$x - 2y + 3z = 1$
$2x + y - 2z = -1$
$3x - y - 4z = -5$

ਜੇਕਰ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਲਿਖੀਏ ਤਾਂ $AX=B$

ਜਿਥੇ $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & -1 & -4\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}, B=\begin{vmatrix}1\\ -1\\ -5\end{vmatrix}$

ਹੁਣ $|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & -1 & -4\end{vmatrix}$

$|A|=1(-4-2)+2(-8+6)+3(-2-3)$

$|A|=-6-4-15=-25$

$A^{-1}=\frac{\text{Adj}A}{|A|}$

$\text{Adj}\,A=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}^T$ i.e. Adjoint ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਕੋਫੈਕਟਰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਲਵਾਂਗੇ।

$c_{11}=(-1)^{1+1}(-4-2)=-6$

$c_{12}=(-1)^{1+2}(-8+6)=+2$

$c_{13}=(-1)^{1+3}(-2-3)=-5$

$c_{21}=(-1)^{2+1}(8+3)=-11$

$c_{22}=(-1)^{2+2}(-4-9)=-13$

$c_{23}=(-1)^{2+3}(-1+6)=-5$

$c_{31}=(-1)^{3+1}(x^4-3)=1$

$c_{32}=(-1)^{3+2}(-2-6)=+8$

$c_{33}=(-1)^{3+3}(1+4)=5$

$$\text{Adj}\,A=\begin{bmatrix}-6 & 2 & -5\\ -11 & -13 & -5\\ 1 & 8 & 5\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-6 & -11 & 1\\ 2 & -13 & 8\\ -5 & -5 & 5\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -6 & -11 & 1 \\ 2 & -13 & 8 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix}}{-25} = \begin{bmatrix} \frac{6}{25} & \frac{11}{25} & \frac{-1}{25} \\ -\frac{2}{25} & \frac{13}{25} & -\frac{8}{25} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{6}{25} & \frac{11}{25} & \frac{-1}{25} \\ -\frac{2}{25} & \frac{13}{25} & -\frac{8}{25} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6-11+5}{25} \\ \frac{-2-13+40}{25} \\ \frac{+5-5+5}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$\therefore x=0, y=1, z=1$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਲੜੀ 1

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$2x-y+3z=9$
$x+y+z=6$
$x-y+z=2$

2. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$3x+y+3z=12$
$x+5y+2z=9$
$2x+3y+z=8$

8.2.2 ਕਰੈਮਰ ਨਿਯਮ (**Crammer's Rule**)

ਗੈਬਰਿਲ ਕਰੈਮਰ (Gabriel Crammer) ਇਕ ਸਵਿਸ ਗਣਿਤ-ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਹੋਏ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਲੀਨਿਅਰ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਦੱਸਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਕਰੈਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮ ਨਾਲ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨਿਯਮ ਵਿੱਚ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਲਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਸਾਡੇ ਪਾਸ ਤਿੰਨ ਲੀਨਿਅਰ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਹਨ।

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = b_2 \qquad \therefore AX=B$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = b_3$$

ਜਿਥੇ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$X_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੈਮਰ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$$20x_1 + 30x_2 = 190$$
$$5x_1 + 10x_2 = 60$$

ਹੱਲ : ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਲਿਖੋ।

$$AX = B$$

ਜਿਥੇ $A=\begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 190 \\ 60 \end{bmatrix}$

ਹੁਣ $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$, $x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 20 & 30 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 200 - 150 = 50$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 190 & 30 \\ 60 & 10 \end{vmatrix} = 1900 - 1800 = 100$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 20 & 190 \\ 5 & 60 \end{vmatrix} = 1200 - 950 = 250$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{100}{50} = 2 \quad , \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{250}{50} = 5$$

$$\therefore x_1 = 2, x_2 = 5$$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੈਮਰ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$
$$-x_1 - x_2 + 3x_3 = 6$$
$$5x_1 - 3x_2 + x_3 = 2$$

ਹੱਲ : ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਲਿਖੋ।

$$A\ X = B$$

ਜਿਥੇ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

ਹੁਣ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 3\,(-1+9) - 2\,(-1-15) - 1\,(3+5)$$
$$= 24 + 32 - 8 = 48$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4\,(-1+9) - 2\,(+6-6) - 1\,(-18+2)$$
$$= 32 - 0 + 16 = 48$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\,(6-6) - 4\,(-1-15) - 1\,(-2-30)$$
$$= 0 + 64 + 32 = 96$$

$$|A_3| = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 6 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 3\,(-2+18) - 2\,(-2-30) + 4(3+5)$$
$$= 48 + 64 + 32 = 144$$

ਕਰੈਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{48}{48} = 1$$

$$X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{96}{48} = 2$$

$$X_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{144}{48} = 3$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਲੜੀ ਨੰ: 2

ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੈਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

(i) $2x = y\,x\,z = 1$

$x - 2y - z = 1.5$

$2y - 5z = 9$

(ii) $X\,x\;2y - z = 2$

$3x - 4y + 2z = 1$

$-x + 3y - z = 4$

8.3 ਸਾਰਾਂਸ਼

ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਜਾਂ ਤਿੰਨ ਨਾ ਮਾਲੂਮ ਚਰਾਂ ਵਾਲੇ ਲੀਨੀਅਰ ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾ ਹੱਲ ਦੋ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ (ਜਿਵੇਂਕਿ ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦਾ ਤਰੀਕਾ (Matrix Inverse Method) ਅਤੇ ਕਰੈਮਰ ਨਿਯਮ (Crammer Rule) ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਬਾਰੇ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਸਹਿਤ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਿੱਤੀ ਹੈ। ਦੋਨਾਂ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਇਕੋ ਹੀ ਆਉਂਦਾ ਹੈ।

8.4 ਪ੍ਰਸ਼ਨ

8.4.1 ਛੋਟੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਤਰੀਕੇ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ?

(ii) Crammer Rule ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਿਉ।

8.4.2 ਲੰਮੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ **ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ** ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਰਾਹੀਂ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$x - 2y + 3z = 1$

$3x - y + 4z = 3$

$2x + y - 2z = -1$

2. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ **ਕਰੈਮਰ ਨਿਯਮ** ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$2x_1 + x_2 = 3$

$-x_1 + 3x_2 = 18$

3. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ **ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ** ਅਤੇ **ਕਰੈਮਰ ਨਿਯਮ** ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$$3x+4y+z=5$$
$$2x+3y+z=4$$
$$x-y+2z=9$$

4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ **ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ** ਅਤੇ **ਕਰੈਮਰ ਨਿਯਮਾਂ** ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$$x+y+z=6$$
$$x-y+z=2$$
$$2x+y-z=1$$

8.5 ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

1. C.S. Aggarwal and R.C. Joshi : Mathemati\cs for Students of Economics.
2. O.P. Bhardwaj and J.K.Sabharwal : Mathematics for Students of Economics.

ਪਾਠ ਨੰ: 1.9 ਲੇਖਿਕਾ :ਡਾ. ਵਿਪਲਾ ਚੋਪੜਾ

ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ
(Measures of Central Tendency)

ਰੂਪ-ਰੇਖਾ (Structure)

9.0 ਭੂਮਿਕਾ
9.1 ਮੰਤਵ
9.2 ਔਸਤਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ
 9.2.1 ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ
 9.2.2 ਮਾਧਿਕਾ
 9.2.3 ਕੁਆਰਟਾਈਲਜ਼, ਡੀਸਾਈਲਜ ਅਤੇ ਪਰਸੇਂਟਾਈਲਜ਼
 9.2.4 ਮੋਡ
9.3 ਸਾਰਾਂਸ਼
9.4 ਪ੍ਰਸ਼ਨ
9.5 ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

9.0 ਭੂਮਿਕਾ

ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰ ਕੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਲੜੀਆਂ ਚਿੱਤਰਾਂ ਜਾਂ ਲੇਖਾਂ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੀ ਸ਼ਕਲ ਦੇ ਕੇ, ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਵਰਗੀਕਰਨ ਅਤੇ ਸਾਰਣੀਕਰਨ ਕਰਨਾ ਹੀ ਸਾਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸਿੱਟੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਕਰਵਾ ਸਕਦਾ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਕ ਅਜਿਹਾ ਅੰਕੜਾ ਲੱਭਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹੜਾ ਡੈਟਾ ਜਾਂ ਲੜੀਆਂ ਦੀਆਂ ਮੁੱਖ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਈਆਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰ ਦੇਵੇ। ਇਹ ਅੰਕੜਿਆ ਨੂੰ ਅਜਿਹੇ ਢੰਗ ਨਾਲ ਤਿਆਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਇਕ ਅੰਕੜਾ ਹੀ ਕੁੱਲ ਅੰਕੜਿਆਂ ~ gF eo/ fJj wkg nkw sö s/fe;/tz (distribution) ਦੇ ਮੱਧ ਵਿਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਜਾਂ ਔਸਤ (Average) ਆਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਔਸਤ ਕਿਸੇ ਲੜੀ ਦੀ ਪ੍ਰਤਿਨਿਧ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ ਜਾਂ ਔਸਤ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ ਨੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਦਿੱਤੀ ਹੈ।

"An average is a figure that represents the whole group." Clark

"An average value is a single value within the range of the data that is used to represent all the values in the series. Since the average is somewhere within the range of the data, it is something called a measure of central value."

-Croxten and Cowden

9.1 ਮੰਤਵ

ਇਸ ਪਾਠ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੰਤਵ ਔਸਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਹੈ ਜਿਹੜੇ ਕਿ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ ਹੋਰ ਮਾਪ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਸਹਿ ਸੰਬੰਧ (correlation), ਔਸਤ ਵਿਚਲਣ (Mean Deviation) ਆਦਿ ਵੀ ਔਸਤ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਔਸਤਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਰਾਹੀਂ ਅਸੀਂ ਸਮੁੱਚੇ ਡੈਟੇ ਦਾ ਸਾਰਾਂਸ਼ ਇਕ ਔਸਤ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਨਾਲ ਤੁਲਨਾ ਆਸਾਨ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਚੰਗੀ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਜਾਂ ਔਸਤ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ

ਇਕ ਚੰਗੀ ਔਸਤ ਦੀਆਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਈਆਂ ਹੋਣੀਆਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ :

ਪ੍ਰੋ: ਯੂਲ ਅਤੇ ਕੈਜਡਲ ਅਨੁਸਾਰ, ਇਕ ਔਸਤ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਗੁਣ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ:

1) ਠੀਕ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਵੇ।
2) ਸਾਰੀਆਂ ਜਾਚਾਂ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੋਵੇ।
3) ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਸਰਲ ਹੋਵੇ।
4) ਅਲਜਬਰੀ ਵਿਵੇਚਣ (Algebraic treatment) ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ।
5) ਹੋਰ ਅੰਕੜਈ ਗਣਨਾ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਕ ਹੋਵੇ।
6) ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰ ਦੁਆਰਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ।
7) ਇਸ ਤੇ ਬਹੁਤ ਵੱਡੇ ਜਾਂ ਬਹੁਤ ਛੋਟੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਜ਼ਿਆਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਨਹੀਂ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ।

9.2 ਔਸਤ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ

ਔਸਤ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ
(Types of Averages)

Mathematical Averages
- Arthmetic Mean
- Geometric Mean
- Harmonic Mean

Positional Averages
- Median
- Mode

ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਔਸਤ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਕਿਸਮਾਂ ਯਾਨੀ ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ, ਮਾਧਿਕਾ ਅਤੇ ਮੋਡ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਪੂਰਵਕ ਅਧਿਐਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

9.2.1 ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ (Arithmetic Mean)

ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਸਾਰੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਨਿਧਤਵ ਕਰਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਆਸਾਨ ਮਾਪ ਹੈ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ t X toshi kD t kbhn"s j ? i / @a' ਚਰ, $X_1, X_2, X_3.....X_n$, n ਮੁੱਲ ਲੈਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਔਸਤ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਸੂਤਰ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

$$\text{Arithmetic Mean (A.M.)} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum x}{n}$$

ਇੱਥੇ $\sum x, x_1, x_2 .... x_n$ ਚਰਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ।

n = ਚਰਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੀ ਕੁਲ ਗਿਣਤੀ ਹੈ।

Arithmetic Mean is defined as sum of the different values of variables divided by number of these values.

ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਣ (Determination of Arithmetic Mean) :

(a) ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਲੜੀ (Individual Series)

1. ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ (Direct Method)

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਉੱਪਰ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਇਸ ਵਿਧੀ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਕੱਢਣ ਦਾ ਸੂਤਰ (Formula) ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।

$$\text{A.M. i.e. } \overline{X} = \frac{\sum x}{n}$$

2. **ਸੰਖੇਪ ਵਿਧੀ (Short cut Method)**

ਇਸ ਵਿਧੀ ਅਨੁਸਾਰ ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਸੂਤਰ (Formula) ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।

$$\text{A.M.i.e. } \overline{X} = A + \frac{\sum d_x}{n}$$

ਇਥੇ A = ਕਲਪਿਤ ਔਸਤ (Assumed Mean) ਹੈ।

$d_x = X - A = X$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਅਤੇ A ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ

$\sum d_x = \sum X - A = d_x$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

N = X ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਮਦਾਂ ਦੀ ਕੁਲ ਗਿਣਤੀ

ਉਦਾਹਰਣ : 1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

Marks	30	41	47	54	23	34	37	51	53	47

ਹੱਲ : ਹੁਣ $\overline{X} = \frac{\sum X}{n}$

$\sum X$ = 30 + 41 + 47 + 54 + 23 + 34 + 37 + 51 + 53 + 47 = 417

N = 10

$$\therefore \overline{X} = \frac{417}{10} = 41.7$$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

X : 14 16 20 22 24

ਹੱਲ : (Solution)

X	$d_x = X - A$ A = 20	$d^1 x = 2$
14	-6	-3
16	-4	-2
20	0	0
22	2	1
24	4	2
	$\sum dx = -4$	$\sum d^1_x = -2$

Direct Method

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{N}$$

$$\overline{X} = \frac{96}{5} = 19.2$$

Short Cut Method

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fx}{N}$$

$$= 20 + \frac{-4}{5}$$

= 20 - .8

$\overline{X} =$ 19.2

Deviation Method

$$\overline{X} = A + \frac{\sum d_x^i}{N} \times i$$

$$= 20 + \frac{-2}{5} \times 2$$

$$= 20 - \frac{4}{5}$$

= 20 - .8

$\overline{X} =$ 19.2

(b) Discrete Series (ਖੰਡਿਤ ਲੜੀ)

ਖੰਡਿਤ ਲੜੀ ਵਿਚ ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰੀਕੇ ਹਨ।

(i) ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ (Direct Method)

ਇਸ ਵਿਧੀ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਔਸਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਹੇਠ ਦਿੱਤਾ ਸੂਤਰ ਹੈ।

$$\overline{X} = \frac{\sum fx}{N}$$

(ii) ਸੰਖੇਪ ਵਿਧੀ (Short Cut Method)

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd}{N}$$

ਇਥੇ A = ਕਲਪਿਤ ਔਸਤ

N = ਸਾਰੀਆਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦਾ ਜੋੜ

(iii) ਪਦ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ (Step Deviation Method)

$$X = A + \frac{\sum fd^1}{N} \times C$$

ਜਿਥੇ $d^1 = \frac{\overline{X} - A}{C}$

C = Common Factor.

ਉਦਾਹਰਣ 3: ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨਾਲ ਔਸਤ ਕੱਢੋ :

Marks :	20	30	40	50	60	70
No. of Students :	8	12	20	10	6	4

ਹੱਲ :

Marks X	No. of Students f	X-40=d	fd
20	8	-20	-160
30	12	-10	-120
40	20	0	0
50	10	+10	100
60	6	+20	120
70	4	30	120
	$\sum f = 60$		$\sum fd = 60$

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd}{N} = 40 + \frac{60}{60} = 41$$

(c) ਅਖੰਡਿਤ ਲੜੀ (Continuous Series)

ਅਖੰਡਿਤ ਲੜੀ ਉਸ ਲੜੀ ਨੂੰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਚਰ ਨਿਰੰਤਰ ਚਰ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਔਸਤ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕੱਢਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(i) ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ (Direct Method)

ਇਸ ਵਿਧੀ ਅਨੁਸਾਰ ਔਸਤ ਕੱਢਣ ਦਾ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਸੂਤਰ (Formula) ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\overline{X} = \frac{\sum fm}{N}$$

ਜਿਥੇ m = x ਚਰ ਦੇ ਹਰ ਵਰਗ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ (Mid Point) ਹੈ।

fm = ਹਰ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਸਬੰਧਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਹੈ।

$\sum fm = fm$ ਕਾਲਮ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

N = ਸਾਰੀਆਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ।

(ii) ਸੰਖੇਪ ਵਿਧੀ (Short Cut Method)

ਇਸ ਵਿਧੀ ਅਨੁਸਾਰ ਔਸਤ i.e. $\overline{x} = A + \frac{\sum fdm}{N}$

ਇਥੇ A = ਕਲਪਿਤ ਔਸਤ ਹੈ।

$\sum d_m = m - A =$ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ A ਵਿਚ ਅੰਤਰ ਹੈ।

$fd_m = d_m$ ਨੂੰ ਸੰਬੰਧਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਹੈ।

$\sum fd_m = fd_m$ ਕਾਲਮ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ।

(iii) ਪਦ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ (Step Deviation Method)

ਇਹ ਵਿਧੀ ਸੰਖੇਪ ਵਿਧੀ ਵਾਂਗ ਹੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ dm ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਫਲ (Common factor) ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਔਸਤ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd^1}{N} \times C \quad \text{ਇਥੇ} \quad d^1 = \frac{m - A}{C}$$

ਜਿਥੇ C = ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ : 4

x :	10-13	13-16	16-19	19-22	22-25	25-28	28-31	31-34	34-37	37-40
f :	8	15	27	51	75	54	36	18	9	7

ਹੱਲ :

X	m	f	$\frac{m-23.5d}{3}$	fd
10-13	11.5	8	-4	-32
13-16	14.5	15	-3	-45
16-19	17.5	27	-2	-54
19-22	20.5	51	-1	-51
22-25	23.5	75	0	0
25-28	26.5	54	1	54
28-31	29.5	36	2	72
31-34	32.5	18	3	54
34-37	35.5	9	4	36
37-40	38.5	7	5	35
		N = 300		$\sum fd = 69$

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd}{N} \times C = 23.5 + \frac{69}{300} \times 3 = 24.19$$

Mathematical Properties of Mean

1. X ਚਰ ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੁੱਲ ਦਾ ਔਸਤ ਤੋਂ ਫਰਕ ਦਾ ਜੋੜ ਹਮੇਸ਼ਾ ਜੀਰੋ (0) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

   i.e. $\sum\left(x - \overline{x}\right) = 0$

2. X ਚਰ ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੁੱਲ ਦਾ ਔਸਤ ਤੋਂ ਫਰਕ ਦੇ Square ਦਾ ਜੋੜ ਹਮੇਸ਼ਾ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। i.e. The Sum of the Square of deviation of the items from arithmetic mean is minimum or $\sum\left(X - \overline{X}\right)^2 = 0$ is minimum.

3. ਜੇ ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀਆਂ ਔਸਤਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸੰਯੋਜਿਤ (combined) ਕੱਢਣ ਲਈ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਸੂਤਰ (Formula) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

$$\overline{X}_{12} = \frac{n_1 \overline{X_1} + n_2 \overline{X}_2}{n_1 + n_2}$$

ਜਿਥੇ $\overline{X}_{12}$ = Combined mean of the two groups.

$\overline{X}_1$ = arithmetic mean of the first group.

$\overline{X}_2$ = arithmetic mean of the second group.

n_1 = number of items in the first group.

n_2 = number of items in the second group.

ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਦੇ ਗੁਣ (Merits of Arithmetic Mean)

1. ਇਹ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਸਮਝੀ ਅਤੇ ਹੱਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।
2. ਇਹ ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਅਤੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
3. ਇਸ ਦਾ ਅਲਜਬਰੀ ਵਿਵੇਚਨ (Algebraic treatment) ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।
4. ਇਸ ਵਿਚ ਲੜੀ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਔਸ਼ਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਵਧੇਰੇ ਪ੍ਰਤੀਨਿਧਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਦੇ ਔਗੁਣ (Demerits of Arithmetic Mean)

1. ਚਰਮ ਮੁੱਲਾਂ (Extreme Values) ਦਾ ਚੋਖਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਪੈਂਦਾ ਹੈ।
2. ਇਸ ਔਸਤ ਦਾ ਮਾਪ ਉਸ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ਹੀ ਸੰਭਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਸਾਨੂੰ ਸਾਰੀਆਂ ਮਦਾਂ (items) ਪਤਾ ਹੋਵੇ।

9.2.2 ਮਾਧਿਕਾ (Median)

ਮਾਧਿਕਾ (Median) ਸ਼ਬਦ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਮੱਧ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ ਅਰਥਾਤ ਇਹ ਉਹ ਰਾਸੀ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਲੜੀ (Series) ਨੂੰ ਦੋ ਸਮਾਨ ਭਾਗਾਂ ਵਿਚ ਵੰਡ ਦਿੰਦੀ ਹੈ।

Secrist ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, "Median of a series is the value of the item actual or estimated when a series is arranged in order of magnitude which divides the distribution into two parts."

ਮਾਧਿਕਾ ਮਦ ਦਾ ਉਹ ਮੁੱਲ ਹੈ ਜੋ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਅਜਿਹੇ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਭਾਗ ਦੀਆਂ ਮਦਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਉਸ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਭਾਗ ਦੀਆਂ ਮਦਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਉਸ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਮਾਧਿਕਾ ਨੂੰ ਕੱਢਣਾ (Calculation of Median)

(a) ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਲੜੀ (Individual Series)

(i) ਜਦੋਂ ਮੱਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ odd ਹੋਵੇ (When number of items i.e. N is odd)

ਜਦੋਂ ਮੱਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ odd ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮਾਧਿਕਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ (Formula) ਰਾਹੀਂ ਕੱਢਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

Median = Size of $\frac{(N+1)^{th}}{2}$ items, where N = Number of items

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ ਜੇਕਰ N = 11

Median = Size of $\frac{(N+1)^{th}}{2}$ items = Size of $\frac{11+1}{2} = 6^{th}$ items.

(ii) ਜਦੋਂ ਮੱਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ even ਹੋਵੇ (When N is even)

ਜਦੋਂ ਮੱਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ even ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮਾਧਿਕਾ ਦੋ ਕੇਂਦਰੀ ਮੱਦਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਵਿਦਮਾਨ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਹ ਦੋ ਮੱਦਾਂ $\frac{N}{2}$ ਅਤੇ $\frac{(N+2)^{th}}{2}$ ਮੱਦਾਂ ਹੋਣਗੀਆਂ ਅਤੇ ਮਾਧਿਕਾ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਵਾਂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਔਸਤ ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ ਜੇਕਰ N = 8 ਹੋਵੇ।

ਤਾਂ $\text{Median} = \frac{4^{th}\text{ item} + 5^{th}\text{ item}}{2}$

ਗੁਣਨਾਂ ਦੇ ਪਗ

(1) ਮਦਾਂ ਚੜ੍ਹਦੇ ਜਾਂ ਲਹਿੰਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਰੱਖੋ।

(2) ਮਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕਰੋ।

(3) ਮਾਧਿਕਾ ਦਾ ਸੂਤਰ ਲਗਾਓ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : Find the value of the median from the following data.

12 14 28 10 2 25

ਹੱਲ : Arrange the terms in accending order.

2 10 12 14 25 28

$N = 6, \frac{N}{2} = 3$

$\frac{N+2}{2}$ or $\frac{N}{2} + 1 = 3 + 1 = 4$

Mean of 3rd and 4th item = $\frac{12+14}{2} = \frac{26}{2} = 13$

$\therefore \text{Median} = 13$

(b) ਖੰਡਿਤ ਲੜੀ (Discrete Series)

ਗਣਨਾ ਦੇ ਪਗ

(i) ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਚੜ੍ਹਦੇ ਕ੍ਰਮ (Ascending Order) ਜਾਂ ਉਤਰਦੇ ਕ੍ਰਮ (Descending Order) ਵਿਚ ਲਿਖੋ।

(ii) ਦਿੱਤੀਆਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ (Frequencies) ਤੋਂ ਸੰਚਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ (Cumulative Frequencies) ਕੱਢੋ।

(iii) Median ਦਾ ਮੱਦ $\frac{N+1}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।

(iv) ਹੁਣ ਸੰਚਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵਾਲੇ ਕਾਲਮ ਨੂੰ ਵੇਖੋ ਅਤੇ ਮੀਡੀਅਨ ਮੱਦ ਲਭੋ ਜਿਹੜਾ $\frac{N+1}{2}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ next higher ਹੋਵੇ।

(v) ਇਹ ਮੁੱਲ ਮੀਡੀਅਨ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਹੇਠ ਦਿਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਮਾਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

Income (Rs.) :	4,000	4,500	5,800	5,060	6,600	5,380
No. of Persons :	24	26	16	20	6	30

ਹੱਲ :

Income arranged in ascending order	No. of Persons f	Cumulative frequency f	Income	f	c.f.
4000	24	24	5380	30	100
4500	26	50	5800	16	116
5060	20	70	6600	6	122

Median = Size of $\frac{N+1}{2}^{th}$ item $= \frac{122+1}{2} = 61.5^{th}$ item.

Median = Rs. 5060.

(c) ਅਖੰਡਿਤ ਲੜੀ (Continuous Series)

ਅਖੰਡਿਤ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਮਾਧਿਕਾ ਕੱਢਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਪਦਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ

(ੳ) ਦਿੱਤੀਆਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਤੋਂ ਸੰਚਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।

(ਅ) Median = Size of $\frac{N^{th}}{2}$ item.

(ੲ) ਸੰਚਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਕਾਲਮ ਵਿਚ ਦੇ $\frac{N^{th}}{2}$ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ Next higher ਮੱਦ ਦੇ ਸਾਹਮਣੇ ਦਿੱਤਾ ਮਾਧਿਕਾ ਵਰਗ (Median class) ਕੱਢੋ।

(ਅ) ਹੁਣ ਮਾਧਿਕਾ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਸੂਤਰ (Formula) ਰਾਹੀਂ ਕੱਢੋ :

$$\text{Median} = L_1 + \frac{\frac{N}{2} - C.f}{f} \times i$$

L_1 = Lower limit of the median class.

C.f = Cumulative frequency of the class preceding the median class.

f = Simple frequency of the median class.

i = Size of the median class.

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ Median ਕੱਢੋ

Class :	100-120	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170
f:	6	25	48	72	116	60
	170-180	180-190	190-200			
	38	22	3			

ਹੱਲ :

Class	f	C.f	Class	f	C.f
100-120 - - -	6	6	160-170	60	327
120-130 - - -	25	31	170-180	38	365
130-140 - - -	48	79	180-190	22	387
140-150 - - -	72	151	190-200	3	390
150-160 - - -	116	267			

Med = Size of $\frac{N^{th}}{2}$ item = Size of $\frac{390}{2} = 195^{th}$ item

Med. lies in the class 150-160

Median = $L_1 + \frac{\frac{N}{2} - C.f}{f} \times i$

$= 150 + \frac{195-151}{116} \times 10 = 153.79$

ਮਾਧਿਕਾ ਦੇ ਗੁਣ (Merits of Median)

ਮਾਧਿਕਾ ਨੂੰ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਸਮਝਿਆ ਅਤੇ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਮਾਧਿਕਾ ਉਤੇ ਚਰਮ ਮੱਦਾਂ (Extreme items) ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਨਹੀਂ ਪੈਂਦਾ।

ਮਾਧਿਕਾ ਨੂੰ ਵੀ ਮਾਪਣ ਦਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਤੇ ਸਪਸ਼ਟ ਸੂਤਰ ਹੈ।

ਮਾਧਿਕਾ ਦੇ ਔਗੁਣ (Demerits of Median)

ਮਾਧਿਕਾ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਲਈ ਸਾਰੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਲਿਖਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਜਦ ਕਿ ਦੂਸਰੇ ਔਸਤ ਦੇ ਢੰਗਾਂ ਵਿਚ ਅਜਿਹਾ ਕਰਨਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ।

ਮਾਧਿਕਾ ਦਾ ਅਲਜਬਰਿਕ ਵਿਵੇਚਨ (algebraic treatment) ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ।

9.2.3 ਕੁਆਰਟਾਈਲਜ਼ (Quartiles), ਡੀਸਾਈਲਜ਼ (Deciles) ਅਤੇ ਪਰਸੇਂਟਾਈਲਜ਼ (Percentiles):

ਕੁਆਰਟਾਈਲਜ਼, ਡੀਸਾਈਲਜ਼ ਅਤੇ ਪਰਸੇਂਟਾਈਲਜ਼ ਕੱਢਣ ਦੀ ਉਹੋ ਹੀ ਵਿਧੀ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਮਾਧਿਕਾ ਕੱਢਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਹੈ। ਮਾਧਿਕਾ ਕਿਸੇ ਲੜੀ ਨੂੰ ਦੋ ਸਮਾਨ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਕੁਆਰਟਾਈਲਜ਼, ਡੀਸਾਈਲਜ਼ ਅਤੇ ਪਰਸੇਂਟਾਈਲਜ਼ ਲੜੀ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਚਾਰ, ਦਸ ਅਤੇ 100 ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

$Q_1 =$ Size of $\frac{N+1^{th}}{4}$ item.

(In individual observation and discrete series)

$Q_2 =$ Size of $\frac{N^{th}}{4}$ item.

(in continuous Series)

$Q_3 =$ Size of $3\left[\frac{N+1}{4}\right]^{th}$ item.

(In individual and discrete Series)

$D_4 =$ Size of $4\left[\frac{N+1}{10}\right]^{th}$ item.

(In individual and discrete Series)

$D_4 =$ Size of $4\left[\frac{N}{10}\right]^{th}$ item.

(in continuous Series)

$P_{64} =$ Size of $64\left[\frac{N+1}{100}\right]^{th}$ item.

(In individual and discrete Series)

$P_{64} =$ Size of $64\left[\frac{N}{100}\right]^{th}$ item.

(in continuous Series)

9.2.4 ਮੋਡ (Mode)

ਮੋਡ ਸ਼ਬਦ ਫਰਾਂਸੀਸੀ ਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅੱਖਰ 'Lamode' ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਭਾਵ ਫੈਸ਼ਨ ਤੋਂ ਹੈ। ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਉਹ ਮੁੱਲ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

''The mode of a distribution is the value at the point around which the items tend to be most heavily concentrated.'' – Croxten, Cowden and Klein.

ਮੋਡ ਕੱਢਣ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ

(a) ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਲੜੀ (Individual Series)

ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਲੜੀ ਵਿਚ ਮੋਡ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਵਿਧੀ ਹੈ :

ਪਦਕ੍ਰਮ (Steps) – (i) ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਚਰ ਦੇ ਵੱਖਰੇ ਵੱਖਰੇ ਮੁੱਲ ਲੜੀ ਵਿਚ ਕਿੰਨੀ-ਕਿੰਨੀ ਲੜੀ ਵਿਚ ਕਿੰਨੀ-ਕਿੰਨੀ ਵਾਰ ਆਉਂਦੇ ਹਨ।

(ii) ਜਿਹੜਾ ਮੁੱਲ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਾਰ ਆਵੇ, ਉਹ ਲੜੀ ਦਾ ਮੋਡ (Mode) ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 :

Sharks :	16	18	22	16	15	16	14	10	11	16

Arrange the above data in ascending order.

10	11	14	15	16	16	16	16	18	22

Mode : 16

ਜੇਕਰ ਦੋ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਕੀਮਤਾਂ ਸਮਾਨ ਅਤੇ ਅਧਿੱਕਤਮ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਰਖਦੀਆਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਅਜਿਹੀ ਵੰਡ ਨੂੰ Bimodal ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ Mode ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ। Mode is ill-defined

(b) ਖੰਡਿਤ ਲੜੀ (Discrete Series)

ਖੰਡਿਤ ਲੜੀ ਵਿੱਚ Mode ਨਰੀਖਣ (Inspection) ਰਾਹੀਂ ਵੀ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਚਰ ਦਾ ਉਹ ਮੁੱਲ ਜਿਸ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ (Frequency) ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇ, ਮੋਡ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਜੇਕਰ

x :	4	7	11	16	25
f :	3	9	14	21	13

ਪਰ ਕਈ ਵਾਰ ਇਸ ਵਿਧੀ ਨਾਲ Mode ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਮੁਸ਼ਕਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਨਾਲ ਵਾਲੇ ਚਰ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦਾ ਅੰਤਰ ਬਹੁਤ ਘੱਟ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਮੂਹੀਕਰਣ ਵਿਧੀ (Grouping Method) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਸਮੂਹੀਕਰਣ (Grouping Table) ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਪਦਕ੍ਰਮ (Steps)

(i) ਪਹਿਲੇ ਕਾਲਮ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਲਿਖੋ।

(ii) ਦੂਸਰੇ ਕਾਲਮ ਵਿਚ ਦੋ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦਾ ਗਰੁੱਪ ਬਣਾ ਕੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਲਿਖੋ।

(iii) ਤੀਜੇ ਕਾਲਮ (column) ਵਿਚ ਪਹਿਲੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਦੋ-ਦੋ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦੇ ਗਰੁੱਪ ਬਣਾਉ ਅਤੇ ਉਹਨਾ ਦੇ ਜੋੜ ਲਿਖੋ।

(iv) ਚੌਥੇ ਕਾਲਮ ਵਿਚ ਤਿੰਨ-ਤਿੰਨ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦੇ ਗਰੁੱਪ ਬਣਾਉ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਲਿਖੋ।

(v) ਪੰਜਵੇਂ ਕਾਲਮ ਵਿਚ ਪਹਿਲੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਤਿੰਨ-ਤਿੰਨ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦੇ ਗਰੁੱਪ ਬਣਾਉ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਲਿਖੋ।

(vi) ਛੇਵੇਂ ਕਾਲਮ ਵਿਚ ਪਹਿਲੀਆਂ ਦੋ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਤਿੰਨ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦੇ ਗਰੁੱਪ ਬਣਾਉ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਲਿਖੋ।

ਨੋਟ : ਗਰੁੱਪ ਵਿਚ ਨਾ ਆਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਛੱਡ ਦੇਵੋ। ਹਰ ਕਾਲਮ ਵਿਚ ਜਿਹੜਾ ਅਧਿੱਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ ਉਸ ਦੇ ਦੁਆਲੇ ਚੱਕਰ ਬਣਾ ਦਿਉ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ Grouping Table ਦੀ ਮੱਦਦ ਨਾਲ Analysis Table ਬਣਾਵਾਂਗੇ।

ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਟੇਬਲ ਬਣਾਉਣਾ (Forming Analysis Table) : ਇਸ ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਦ ਹਨ:

(i) ਪਹਿਲਾਂ ਚਰ ਦੇ ਵੱਖਰੇ ਵੱਖਰੇ ਮੁੱਲ ਲਿਖੋ।

(ii) ਪਹਿਲੇ ਕਾਲਮ ਵਿਚ ਸਮੂਹੀਕਰਣ Table ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਕਾਲਮ ਦੇ ਅਧਿੱਕਤਮ ਮੁੱਲ ਵਾਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ।

(iii) ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਟੇਬਲ ਦੇ ਦੂਜੇ, ਤੀਜੇ, ਚੌਥੇ, ਪੰਜਵੇਂ ਅਤੇ ਛੇਵੇਂ ਕਾਲਮਾਂ (Columns) ਵਿਚ ਸਮੂਹੀਕਰਣ ਟੇਬਲ ਦੇ ਅਧਿੱਕਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਵਾਲੇ ਪੱਦਾਂ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ।

(iv) ਦਰ ਦੇ ਵੱਖਰੇ ਮੁੱਲ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰੋ।

(v) ਜਿਸ ਮੁੱਲ ਦੇ ਅੰਕ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੋਣਗੇ, ਉਹ ਮੋਡ (Mode) ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 :

From the following data of the height of 100 persons in a commercial concern determine the modal height.

Height in inches :	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67
No. of Persons :	4	6	5	10	20	22	24	6	2	1

Solution :

Grouping Table

Height in inches	Col.1	Col.2 (1+2)	Col.3 (2+3)	Col.4 (1+2+3)	Col.5 (2+3+4)	Col.6 (3+4+5)
58	4	10				
59	6		11	15		
60	5	15			21	
61	10		30			35
62	20	(42)		(52)	(66)	
63	22		(46)			
64	(24)	30		32		(52)
65	6		8		9	
66	2	3				
67	1					

Analysis Table

Height in Inches										
Col. No.	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**
1							×			
2					×	×				
3						×	×			
4				×	×	×				
5					×	×				
6						×	×	×		
				1	3	5	3	1		

ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਟੇਬਲ ਵਿਚ 63 ਮੁੱਲ ਦੇ ਅੰਕ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ

Mode = 63

(C) ਅਖੰਡਿਤ ਲੜੀ (Continuous Series)

ਅਖੰਡਿਤ ਲੜੀ ਵਿਚ ਮੋਡ ਕੱਢਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਖੰਡਿਤ ਲੜੀ ਵਾਲੀ ਵਿਧੀ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਨਿਰੀਖਣ ਵਿਧੀ ਜਾਂ ਸਮੂਹੀਕਰਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ (Modal Class) ਪਤਾ ਕਰੋ। ਮੋਡ ਕੱਢਣ ਲਈ ਸੂਤਰ (Formula) ਲਗਾਉ।

$$\text{Mode} = L_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

Where L_1 = Lower limit of the modal class

Δ_1 = the difference between the frequency of the modal class and the frequency of the pre-modal class (ignoring signs) = $f_1 - f_0$

Δ_2 =the difference between the frequency of the modal class and the frequency of the post-modal class (ignoring signs) = $f_1 - f_2$

i = the class-interval of the modal class

$$\text{Mode} = L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

ਨੋਟ (i) ਜੇ ਡੈਟਾ inclusive form ਵਿਚ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ exclusive form ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ।

(ii) ਜਦੋਂ ਵਰਗ ਇਕੋ ਜਿਹੇ ਨਾ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਇ.ਕੋ ਜਿਹਾ ਬਣਾਉ।

(iii) ਜੇਕਰ Modal Class ਪਹਿਲੀ Class ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਪਿਛਲੀ ਵਰਗ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ Zero ਲਵੋ।

(iv) ਕਈ ਵਾਰ ਮੋਡ (Mode) ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਰਗਾਂ ਵਿਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਮੋਡ ਜਦੋਂ ਇਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਦੋ ਵਰਗਾਂ ਵਿਚ ਪਾਇਆ ਜਾਵੇ ਅਰਥਾਤ ਮੋਡ ਨਿਰਧਾਰਤ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ। ਇਸ ਲਈ ਮੋਡ ਕੱਢਣ ਦੇ ਸਮੇਂ ਪਹਿਲਾਂ ਮਾਧਿਕਾ ਅਤੇ ਫੇਰ ਸਮਾਨਾਂਤਰ ਔਸਤ ਕੱਢੋ ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੋ।

Mode = 3 Median - 2 Mean

ਉਦਾਹਰਣ 11 :

ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਨੀ ਵਿਚ ਮੋਡ ਕੱਢੋ

Marks	No. of Students	Marks	No. of Students
Above 0	80	Above 60	28
Above 10	77	Above 70	16
Above 20	72	Above 80	10
Above 30	65	Above 90	8
Above 40	55	Above 100	0
Above 50	43		

Marks	No. of Students	Marks	No. of Students
0-10	3	50-60	15
10-20	5	60-70	12
20-30	7	70-80	6
30-40	10	80-90	2
40-50	12	90-100	8
		100-110	0

By inspection the Modal Class is 50-60

$$\text{Mode} = L_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

$$\text{Mode} = 50 + \frac{3}{3+3} \times 10 = 50 + \frac{3}{6} \times 10 = 55$$

ਮੋਡ ਦੇ ਗੁਣ (Merits of Mode)

1. ਮੋਡ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਆਧਾਰ ਉਪਰ ਸਭ ਨਾਲੋਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਤਿਨਿਧਤਾ ਵਾਲੀ ਔਸਤ ਹੈ।
2. ਮੋਡ ਉਪਰ extreme values ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਨਹੀਂ ਪੈਂਦਾ।
3. ਇਸ ਨੂੰ Open-end ਵਰਗੀਕਰਣ ਵਿਚ ਮਾਪਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
4. ਇਸ ਦਾ ਮੁੱਲ ਗਰਾਫ ਦੁਆਰਾ ਵੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
5. ਇਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਰੀਆ ਮੱਦਾਂ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ।
6. ਇਸ ਨੂੰ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਸਮਝਿਆ ਅਤੇ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਮੋਡ ਦੇ ਔਗੁਣ (Demerits of Mode)

1. ਮੋਡ ਦਾ ਅਲਜੈਬਰੀ ਵਿਵੇਚਨ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ।
2. ਇਸ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸ਼ਰੇਣੀ ਦੀ ਹਰ ਇਕ ਮੱਧ ਉਪਰ ਆਧਾਰਿਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।
3. ਮੋਡ ਦੀ ਇਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨਹੀਂ। ਮੋਡ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀ ਵੱਖਰੇ ਵੱਖਰੇ ਸੂਤਰ ਹਨ ਅਤੇ ਹਰ ਇਕ ਸੂਤਰ ਵੱਖਰਾ ਪਰਿਣਾਮ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।
4. ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੱਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਮੋਡ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ ਮੱਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

ਨਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦਾ।

5. ਮੋਡ ਵਿਚ ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਆਖਰੀ ਮੱਦ ਦਾ ਕੋਈ ਮਹੱਤਵ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

9.3 ਸਾਰਾਂਸ਼

ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ ਯਾਨੀ ਔਸਤ ਦੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਿਸਮਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਿੱਤੀ ਹੈ। ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ, ਮਾਧਿਕਾ, ਮੋਡ, ਕੁਆਰਟਾਇਲਜ਼, ਡੀਸਾਈਲਜ ਅਤੇ ਪਰਸੇਟਾਈਲਜ਼ ਨੂੰ ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਲੜੀ, ਖੰਡਿਤ ਲੜੀ ਅਤੇ ਅਖੰਡਿਤ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਕੱਢਣ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਕੇ ਦੱਸੇ ਗਏ ਹਨ ਤਾਕਿ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਅਸਾਨੀ ਹੋਵੇ। ਹਰ ਔਸਤ ਦੇ ਗੁਣ ਅਤੇ ਔਗੁਣ ਬਾਰੇ ਵੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

9.4 ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਛੋਟੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਕੀ ਹੈ?
2. ਮਾਧਿਕਾ ਦੇ ਦੋ ਔਗੁਣ ਲਿਖੋ।
3. ਪਰਸੇਂਟਾਈਲਜ਼ ਦਾ ਅਖੰਡਿਤ ਲੜੀ ਦਾ ਸੂਤਰ ਲਿਖੋ।
4. ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਦੀਆਂ ਦੋ Mathematical Properties ਦੱਸੋ।
5. ਮੋਡ ਦੇ ਤਿੰਨ ਗੁਣ ਲਿਖੋ।

ਵੱਡੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਲੰਮੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਅਤੇ ਮੋਡ ਕੱਢੋ।

Monthly Wages (Rs.)	No. of Workers
Less than 200	78
200-400	165
400-600	93
600-800	42
800-1000	12

Find out the mode from the following data:

x :	5	10	15	20	25	30	35	40	45
f :	1	3	4	9	11	12	3	2	2

Find Q_1, Q_3, Median P_{43} for the data given below:

21, 17, 18, 11, 27, 24, 22, 19, 14

Find Arithmatic Mean for the following series:

Marks less than :	10	20	30	40	50	60	70	80
Frequency :	3	14	31	56	78	88	96	100

Calculate Median

Class interval:	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
Frequency :	7	18	34	50	35	20	6

9.5 ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

S.P. Gupta : Statistical Methods

ਪਾਠ ਨੰ: 1.10 | ਲੇਖਿਕਾ :ਡਾ. ਵਿਪਲਾ ਚੋਪੜਾ

ਖਿਲਾਰ ਤੇ ਮਾਪ
(Measures of Dispersion)

ਰੂਪ-ਰੇਖਾ (**Structure**)

10.0 ਭੂਮਿਕਾ
10.1 ਮੰਤਵ
10.2 ਖਿਲਾਰ ਦਾ ਅਰਥ
10.3 ਖਿਲਾਰ ਦੇ ਮਾਪ ਦੇ ਤਰੀਕੇ
10.3.1 ਰੇਂਜ (Range)
10.3.2 ਅੰਤਰ-ਕੁਆਰਟਾਈਲ ਰੇਂਜ (Inter-quartile Range)
10.3.3 ਅਰਧ-ਅੰਤਰ ਕੁਆਰਟਾਈਲ ਰੇਂਜ
10.3.4 ਔਸਤ ਵਿਚਲਨ
10.3.5 ਪ੍ਰਮਾਪ ਵਿਚਲਨ
10.4 ਸਾਰਾਂਸ਼
10.5 ਪ੍ਰਸ਼ਨ
10.6 ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

10.0 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਿਛਲੇ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ ਬਾਰੇ ਵਿਸਤਾਰ ਨਾਲ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਇਹ ਮਾਪ ਸਾਨੂੰ ਲੜੀ (Series) ਦੇ ਮੱਧ ਭਾਗ ਤੇ ਮੱਦਾਂ ਦੀ ਘਣਤਾ (Concentration) ਦਾ ਗਿਆਨ ਦਵਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਮਾਪ ਅੰਕੜਾਂ ਵਿਗਿਆਨ ਲਈ ਬਹੁਤ ਲਾਭਦਾਇਕ ਹਨ। ਪਰ ਇਨ੍ਹਾਂ ਮਾਪਾਂ ਵਿੱਚ ਇਕ ਵੱਡੀ ਕਮੀ ਹੈ। ਇਹ ਮਾਪ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਭਿੰਨਤਾ (Variations) ਸੰਬੰਧੀ ਨਹੀਂ ਦੱਸਦੇ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਇਹ ਸਮਸ਼ੱਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 :

ਪੰਜ ਆਦਮੀਆਂ ਦਾ ਭਾਰ

	Series A	Series B	Series C
	80	65	110
	80	90	105
	80	80	90
	80	70	40
	80	95	55
Total	400	400	400
$\overline{X}$	80	80	80

ਜੇ ਅਸੀਂ ਉਪਰਲੀਆਂ ਤਿੰਨ ਲੜੀਆਂ ਨੂੰ ਵੇਖੀਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਲੜੀ ਵਿੱਚ $N=5, \sum X=400, \overline{X}=80$ ਤਿੰਨਾਂ ਹੀ ਲੜੀਆਂ ਦੀ ਔਸਤ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਪਰ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਬਣਤਰ ਦਾ ਢਾਂਚਾ

ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹੈ। Series A ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਆਦਮੀ ਦਾ ਭਾਗ ਔਸਤ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਮੱਦਾਂ ਵਿੱਚ ਇਕਸਾਰਤਾ (Uniformity) ਹੈ। ਦੂਜੀ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਇਕੋਂ ਹੀ ਆਦਮੀ ਦਾ ਭਾਰ ਔਸਤ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਬਾਕੀ ਮੰਦਾਂ ਔਸਤ ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਵੱਧ ਹਨ ਅਰਥਾਤ Series B ਵਿੱਚ Series A ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ ਭਿੰਨਤਾ (Variations) ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ। Series C ਵਿੱਚ ਭਿੰਨਤਾ Series A ਅਤੇ Series B ਨਾਲੋਂ ਬਹੁਤ ਜਿਆਦਾ ਹੈ। ਤਿੰਨਾਂ ਲੜੀਆਂ ਦੀ ਔਸਤ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਦੇ ਬਾਵਜੂਦ ਇਨ੍ਹਾਂ ਲੜੀਆਂ ਵਿੱਚ ਭਿੰਨਤਾ (Variations) ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਔਸਤ ਸਾਨੂੰ ਲੜੀ ਦੀ ਸਾਫ਼ ਤਸਵੀਰ ਪੇਸ਼ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦਾ। ਇਸ ਲਈ ਖਿਲਾਰ (Dispersion) ਇੱਕ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਵਖੇਵੇ ਯੋਗਤਾ (Variability) ਦਾ ਪਤਾ ਹੀ ਨਹੀਂ ਦਿੰਦਾ ਸਗੋਂ ਇਹ ਵਿਖੇਪਤਾ ਦੇ ਠੀਕ ਮਾਪ ਬਾਰੇ ਵੀ ਦੱਸਦਾ ਹੈ।

10.1 ਮੰਤਵ

ਖਿਲਾਰ ਦੇ ਮਾਪ ਦੇ ਲਾਭ ਜਾਂ ਮੰਤਵ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ :

* ਔਸਤ ਦੀ ਭਰੋਸੇਯੋਗਤਾ (Reliability) ਨੂੰ ਟੈਸਟ ਕਰਨ ਲਈ
* ਭਿੰਨਤਾ (Variability) ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਲਈ
* ਹੋਰ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ ਢੰਗ ਵਰਤਣ ਬਾਰੇ।

10.2 ਖਿਲਾਰ ਦਾ ਅਰਥ

ਕਿਸੇ ਔਸਤ (average) ਦੁਆਲੇ ਮੱਦ (items) ਦੇ ਖਿਲਾਰ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਜੋ ਲੜੀਆਂ (Series) ਦੀ ਬਣਤਰ ਉਤੇ ਚਾਨਣਾ ਪਾਵੇ, ਨੂੰ ਖਿਲਾਰ (dispersion) ਆਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਆਮ ਭਾਵ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦਾ ਸੰਕੇਤ ਇਕ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਮੱਦਾਂ ਦੀ ਇਕਸਾਰਤਾ (Uniformity) ਦੀ ਘਾਟ ਵੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਖਿਲਾਰ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ

According to Simpson and Kafka, "The measurement of the Scatterness of the mass of figures in a series about an average is called a measure of variation or dispersion."

According to Spiegel, "The degree to which numerical data tend to spread about an average value is called the variation or dispersion of the data."

According to A.L. Bowley, "Dispersion is a measure of variation of the items."

According to L.R. Connor, "Dispersion is a measure of the extent to which the individual items vary."

10.3 ਖਿਲਾਰ ਦੇ ਮਾਪ ਦੇ ਤਰੀਕੇ

ਖਿਲਾਰ ਦੇ ਮਾਪ ਦੋ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ:

(ੳ) **ਅਸੀਮ ਮਾਪ (Absolute Measures)** : ਉਹ ਖਿਲਾਰ ਦੇ ਮਾਪ ਜਿਹੜੇ ਵੰਡ ਦੀਆਂ ਮੌਲਿਕ ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਮ ਮਾਪ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

(ਅ) **ਤੁਲਨਾਤਮਕ ਮਾਪ (Relative Measures)** : ਇਹ ਖਿਲਾਰ ਦੇ ਉਹ ਮਾਪ ਹਨ ਜੋ ਕਿਸੇ ਦਰ ਦੀਆਂ ਮੌਲਿਕ ਇਕਾਈਆਂ ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਸਾਧਾਰਨ ਤੌਰ ਤੇ ਸ਼ੁੱਧ ਅੰਕਾਂ (Pure Numbers), ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤਾਂ (Percentages) ਆਦਿ ਰੂਪਾਂ ਵਿਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਖਿਲਾਰ ਦੇ ਚੰਗੇਮਾਪ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Characteristics of a good measure of dispersion)

ਖਿਲਾਰ ਦੇ ਕਈ ਮਾਪ ਹਨ ਪਰ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਮਾਪਾਂ ਨੂੰ ਖਿਲਾਰ ਦਾ ਚੰਗਾ ਮਾਪ ਨਹੀਂ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ। ਇਕ ਚੰਗੇ ਮਾਪ ਲਈ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦਾ ਹੋਣਾ ਜਰੂਰੀ ਹੈ।

1. ਇਹ ਗਿਣਤੀ ਕਰਨ ਅਤੇ ਸਮਝਣ ਵਿਚ ਆਸਾਨ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।
2. ਇਹ ਲੜੀ (Series) ਦੀ ਸਾਰੀਆਂ ਮਦਾਂ ਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।
3. ਇਸ ਦੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।
4. ਇਹ ਅੱਗੇ ਬੀਜ-ਗਣਿਤ ਦੇ ਯੋਗ ਹੋਵੇ।

ਖਿਲਾਰ ਦੇ ਮਾਪ

ਖਿਲਾਰ ਦੇ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਮਾਪ ਹਨ :

1. ਰੇਂਜ (Range)
2. ਅੰਤਰ-ਕੁਆਰਟਾਈਲ ਰੇਂਜ (Inter-Quartile Range)
3. ਅਰਧ-ਅੰਤਰ ਕੁਆਰਟਾਈਲ ਰੇਂਜ ਜਾਂ ਕੁਆਰਟਾਈਲ ਵਿਚਲਨ (Semi-Inter Quartile Range, or Quartile Deviation)
4. ਔਸਤ ਵਿਚਲਨ (Mean Deviation or Average Deviation)
5. ਪ੍ਰਮਾਪ ਵਿਚਲਨ (Standard Deviation)

10.3.1 ਰੇਂਜ (Range)

ਰੇਂਜ ਖਿਲਾਰ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਸਾਧਾਰਣ ਮਾਪ ਹੈ। ਰੇਂਜ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿਸੇ ਲੜੀ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਵਿਚ ਅੰਤਰ। (Range is defined as the difference between the maximum and the minimum value of the variable)

Mathematically

Range = Maximum Value - Minimum Value

Range = $R_1 - R_2$

ਰੇਂਜ ਦਾ ਤੁਲਨਾਤਮਕ ਮਾਪ (Coefficient of Range)

$$= \frac{\text{Maximum Value} - \text{MinimumValue}}{\text{Maximum Value} + \text{MinimumValue}}$$

$$\text{Coefficient of Range} = \frac{L - S}{L + S}$$

ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਸੂਚੀ (Individual Series)

ਉਦਾਹਰਣ 2 :

Calculate Range and Coefficient of Range.

-6, -4, 2, 0, 2, 4, 6, 8

ਹੱਲ :

ਰੇਂਜ = L - S = 8 - (-6) = 14

$$\text{Coefficient of Range} = \frac{L-S}{L+S} = \frac{8-(-6)}{8+(-6)} = \frac{14}{2} = 7$$

ਖੰਡਿਤ ਲੜੀ (Discrete Series)

ਉਦਾਹਰਣ 3 :

Find Range and Coefficient of Range for the following data :

X :	5	10	15	20	25	30	35	40
F :	4	7	21	47	53	24	12	6

Range = L - S

ਹੁਣ L = 40, S = 5

Coefficient of Range = $\frac{40-5}{40+5} = \frac{35}{45} = .778$

ਖੰਡਿਤ ਲੜੀ (Continuous Series)

ਉਦਾਹਰਣ 4 :

Calculate Range and Coefficient of Range

X :	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
F :	4	9	16	21	13	6

L = 80 ਅਤੇ S = 20

$\therefore$ R = 80 - 20 = 60

Coefficient of Range $\frac{L-S}{L+S}$

$$= \frac{80-20}{80+20} = \frac{60}{100} = .6$$

ਰੇਂਜ ਦੇ ਗੁਣ

1. ਰੇਂਜ ਖਿਲਾਰ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਸਾਦਾ ਅਤੇ ਆਸਾਣ ਤਰੀਕਾ ਹੈ।
2. ਰੇਂਜ ਕੱਢਣ ਲੱਗਿਆ ਹਰ ਮੱਦ ਦਾ ਮੁੱਲ ਜਾਨਣਾ ਜਰੂਰੀ ਨਹੀਂ।
3. ਇਹ ਉਸੇ ਵੇਲੇ ਕੱਢਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕੇਵਲ ਚਰਮ ਦੀਆਂ ਮੱਦਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਹੀ ਪਤਾ ਹੋਵੇ।
4. ਇਸ ਨੂੰ ਸਮਝਣਾ ਆਸਾਨ ਹੈ।

ਰੇਂਜ ਦੇ ਔਗੁਣ

ਖਿਲਾਰ ਦੇ ਇਸ ਮਾਪ ਵਜੋਂ ਰੇਂਜ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਔਗੁਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ:

1. ਰੇਂਜ ਨੂੰ ਖਿਲਾਰ ਦੇ ਖੁੱਲੇ ਸਿਰੇ ਵਾਲੇ ਵਰਗਅੰਤਰਾਂ ਵਿਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ।
2. ਇਹ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਮਦਾਂ ਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ।
3. ਇਹ ਹੋਰ ਅੱਗੇ ਬੀਜ-ਗਣਿਤ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦੇ ਯੋਗ ਨਹੀਂ।
4. ਸੰਖੇਪ ਅਤੇ ਠੀਕ ਅਧਿਐਨ ਲਈ ਇਹ ਯੋਗ ਨਹੀਂ।

10.3.2 ਅੰਤਰ-ਕੁਆਰਟਾਈਲ ਰੇਂਜ (Inter-Quartile Range)

ਅਸੀਂ ਉਪਰ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਖਿਲਾਰ ਦਾ ਇਕ ਔਗੁਣ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਸਿਰਫ ਦੋ ਸਿਰਿਆਂ ਵਾਲੀਆਂ ਮੱਦਾਂ ਨਾਲ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੁਕਸ ਨੂੰ ਦੂਰ ਕਰਨ ਲਈ ਅੰਤਰ-ਕੁਆਰਟਾਈਲ ਰੇਂਜ (Inter-quartile Range) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੀਆਂ 25% ਅਤੇ ਆਖਰੀ 25% ਮੱਦਾਂ ਛੱਡ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਜੋ ਸਿਰਿਆਂ ਵਾਲੀਆਂ ਮੱਦਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖ਼ਤਮ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦੇ।

$\therefore$ ਅੰਤਰ-ਦੁਆਰਟਾਈਲ ਰੇਂਜ $= Q_3 - Q_1$

ਅੱਧ ਅੰਤਰ-ਕੁਆਰਟਾਈਲ ਰੇਂਜ ਜਾਂ ਕੁਆਰਟਾਈਲ ਵਿਚਲਨ (Semi-Inter Quartile Range or Quartile Deviation)

ਇਥੇ ਖਿਲਾਰ ਦਾ ਮਾਪ ਹੇਠਲੇ ਅਤੇ ਉਪਰਲੇ ਕੁਆਰਟਾਈਲ ਦੇ ਫਰਕ ਨੂੰ ਦੋ ਨਾਲ ਵੰਡ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

Quartile Deviation (i.e. Q.D) = $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

Coefficient of Quartile Deviation = $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

ਉਦਾਹਰਣ 6 :

ਅਰਥ ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ 59 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਨੰਬਰਾਂ ਦਾ ਅੱਧ ਅੰਤਰ-ਕੁਆਰਟਾਈਲ ਰੇਂਜ਼ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ (Coefficient) ਲੱਭੋ।

ਨੰਬਰ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ
0–10	4
10–20	8
20–30	11
30–40	15
40–50	12
50–60	6
60–70	3

ਹੱਲ :

ਨੰਬਰ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ f	ਸੰਚਵੀਂ ਆਵ੍ਰਿਤੀ Commulative Frequency
0–10	4	4
10–20	8	12
20–30	11	23
30–40	15	38
40–50	12	50
50–60	6	56
60–70	3	59
	59	

ਪਹਿਲਾ ਕੁਆਰਟਾਈਲ ਜਾਂ $Q_1 = \frac{59}{4}$ ਵੇਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੇ ਨੰਬਰ ਭਾਵ, ਜੋ ਕਿ 20–30 ਨੰਬਰਾਂ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਸੰਬੰਧਤਮ ਫਾਰਮੂਲੇ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦਿਆਂ

$$Q_1 = 20 + \frac{30-20}{11}(14.75-12) = 22.5$$ **ਨੰਬਰ**

$Q_3 = 3\frac{(59)}{4} = 44.25$ ਵੇਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀ, ਜੋ ਕਿ 40-50 ਨੰਬਰਾਂ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਹਨ

Q_1 ਦੀ ਗਣਨਾਂ ਵਾਂਗ

$$Q_3 = 40 + \frac{50-40}{12}(44.25-38) = 45.2$$

ਅਰਧ-ਅੰਤਰ ਕੁਆਰਟਾਈਲ ਰੇਂਜ $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{45.2-22.5}{2} = \frac{22.7}{2} = 11.35$$

ਅਰਧ-ਅੰਤਰ ਕੁਆਰਟਾਈਲ ਰੇਂਜ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

$$\frac{45.2-22.5}{45.2+22.5} = 0.335$$

ਕੁਆਰਟਾਈਲ ਵਿਚਲਨ ਦੇ ਗੁਣ

(i) ਕੁਆਰਟਾਈਲ ਵਿਚਲਨ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਦਾ ਲਾਭ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਸਾਦਾ ਤੇ ਗਣਨਾਂ ਵਿਚ ਸੌਖਾ ਹੈ।

(ii) ਇਹ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀਆਂ 50% ਮੱਦਾਂ ਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਰੇਂਜ ਤੋਂ ਵਧੀਆ ਹੈ।

(iii) ਇਸ ਨੂੰ ਖੁੱਲੇ ਸਿਰੇ ਵਾਲੇ ਵਰਗਅੰਤਰਾਂ (Open and Classes) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਕੁਆਰਟਾਈਲ ਵਿਚਲਨ ਦੇ ਔਗੁਣ

(i) ਇਹ ਹੋਰ ਅੱਗੇ ਬੀਜ-ਗਣਿਤ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦੇ ਯੋਗ ਨਹੀਂ।

(ii) 50% ਮੱਦਾਂ ਦਾ ਕੋਈ ਮਹੱਤਵ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਨਤੀਜਾ ਭਰੋਸੇਯੋਗ ਨਹੀਂ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ।

10.3.4 ਔਸਤ ਵਿਚਲਨ (Mean & Average Deviation)

ਅਜਿਹੇ ਮਾਪ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਿਸੇ ਔਸਤ ਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ ਨੂੰ ''ਔਸਤ ਵਿਚਲਨ'' ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

"According to Clark and Schkade, "Average deviation is the average amount of Scatter of the items in a distribution from either the mean or the median, ignoring the signs of the deviation. The average that is taken of the scatter is an arithmetic mean, which account for the fact that this measure is often called the mean-deviation."

ਕਿਸੇ ਕੇਂਦਰੀ ਝੁਕਾਅ (Central tendency) ਦੇ ਮਾਪ, ਭਾਵ ਮੀਨ (mean), ਮੀਡੀਅਨ (median) ਜਾਂ ਮੋਡ (mode) ਤੋਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਮੱਦਾਂ ਦੇ ਵਿਚਲਨ ਦੀ ਔਸਤ ਨੂੰ ਹੀ ਕਿਸੇ ਲੜੀ ਦੀ ਔਸਤ

ਜਾਂ ਮੀਨ ਵਿਚਲਨ ਆਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਵਿਚ ਸਭ ਵਿਚਲਨਾਂ ਨੂੰ ਸਾਕਾਰਤਮਕ (Positive) ਰੂਪ ਵਿਚ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਭ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ ਮੱਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੁਆਰਾ ਵੰਡ ਕੇ ਮੀਨ ਵਿਚਲਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਮੱਦਾਂ ਦੀ ਔਸਤ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਨਿਸ਼ਾਨੀਆਂ (ਭਾਵ + ਜਾਂ –)ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਗੋਚਰ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ।

ਔਸਤ ਵਿਚਲਨ ਦੀ ਗਣਨਾਂ ਕਦੀ ਕਦੀ ਮੀਡੀਅਨ ਜਾਂ ਮੋਡ ਤੋਂ ਵੀ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਪਰ ਅਭਿਆਸ ਵਿਚ ਇਹ ਵਧੇਰੇ ਮੀਨ ਤੋਂ ਹੀ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਮੋਡ ਤੋਂ ਇਸ ਦੀ ਗਣਨਾ ਬਹੁਤ ਘੱਟ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

(i) ਮੀਨ ਤੋਂ ਔਸਤ ਵਿਚਲਨ,

$$MD = \frac{\sum |D_a|}{N}$$

ਜਿਥੇ $\sum |D_a|$ ਮਦਾਂ ਦੀ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮੀਨ (Mean) ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ $n =$ ਮਦਾਂ ਦਾ ਨੰਬਰ।

(ii) ਮੀਡੀਅਨ ਤੋਂ ਔਸਤ ਵਿਚਲਨ

$$MD = \sum \frac{|D_M|}{n}$$

ਜਿਥੇ $\sum |D_M|$ ਮੱਦਾਂ ਦੀ ਮੀਡੀਅਨ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ।

(iii) ਮੋਡ ਤੋਂ ਔਸਤ ਵਿਚਲਨ

$$MD = \sum \frac{|D_z|}{n}$$

ਜਿੱਥੇ $|D_z|$ ਮੱਦਾਂ ਦਾ ਮੋਡ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ।

ਔਸਤ ਵਿਚਲਨ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ (Coefficient of Mean Deviation)

ਜੇ ਵਿਚਨ ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਤੋਂ ਲਏ ਜਾਣ

$$\text{Coefficient of M.D.} = \frac{M.D.}{\overline{X}}$$ (ਜਿਥੇ $\overline{X}$ ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ)

ਜੇ ਵਿਚਲਨ ਮੀਡੀਅਨ ਤੋਂ ਲਏ ਜਾਣ

$$\text{Coefficient of MD} = \frac{M.D.}{M}$$ (ਜਿਥੇ M = ਮੀਡੀਅਨ)

ਜੇ ਵਿਚਲਨ ਮੋਡ (Mode) ਤੋਂ ਲਏ ਜਾਣ

$$\text{Coefficient of MD} = \frac{M.D.}{Z}$$ (ਜਿਥੇ Z = ਮੋਡ)

ਉਦਾਹਰਣ 7 :

Compute MD and Coefficient of MD from mean and median for the following series:

3 7 12 14 15 18 22

ਹੱਲ :

X : 3 7 12 14 15 18 22

ਹੁਣ $\overline{X}=\frac{\sum X}{N}=\frac{91}{7}=13$

X	$D=X-\overline{X}$	$\|D\|$
3	-10	10
7	-6	6
12	-1	1
14	+1	1
15	2	2
18	3	5
22	9	9
		34

$\sum |D| = 34$

ਅਤੇ $M.D.=\frac{\sum|D|}{N}=\frac{34}{7}=4.86$

MD from Mean = 4.86

Coefficient of Mean Deviation from Mean

$=\frac{\text{M.D. from Mean}}{\text{Mean}}=\frac{4.86}{13}=.374$

(2) N = 7, Median = Size of $\frac{N+1}{2}$ th item = 4th item = 14

X	$D=X-\text{Med.}$	$\|D\|$
3	-11	11
7	-7	7
12	-2	2
14	0	0
15	1	1
18	4	4
22	8	8
		$\sum\|D\|=33$

$$M.D. = \frac{\sum|D|}{N} = \frac{33}{7} = 4.71$$

Coefficient of M.D. from Median

$$\frac{\text{M.D. from Median}}{\text{Median}} = \frac{4.71}{14} = .336$$

ਉਦਾਹਰਣ 8 :

Calculate Mean Deviation from the following Series:

X	10	11	12	13	14
F	3	12	18	12	3

ਹੱਲ :

M=12

X	f	$\|D\|$	$f\|D\|$	C.F.
10	3	2	6	3
11	12	1	12	15
12	18	0	0	33
13	12	1	12	45
14	3	2	6	48
N=48				$\sum f\|D\|=36$

$$M.D. = \frac{\sum f|D|}{N}$$

Median = Size of $\frac{N+1}{2}$th item = $\frac{48+1}{2}$ = 24.5 item.

Size of 24.5th item is 12, hence Median = 12.

$$M.D. = \frac{36}{48} = 0.75$$

ਉਦਾਹਰਣ 9 :

Calculate Mean Deviation and its Coefficient from the following data:

Class	Frequency	Class	Frequency
0-10	5	40-50	20
10-20	8	50-60	14
20-30	12	60-70	12
30-40	15	70-80	6

ਅਸੀ Median ਤੋਂ Mean Deviation Calcualte ਕਰਾਂਗੇ।

Class	Frequency	C.f.	m	$\|D\|$ $\|m-43\|$	$f\|D\|$
0-10	5	5	5	38	190
10-20	8	13	15	28	224
20-30	12	25	25	18	216
30-40	15	40	35	8	120
40-50	20	60	45	2	40
50-60	14	74	55	12	168
60-70	12	86	65	22	264
70-80	6	92	75	32	192
	N=92				$\sum f\|D\|=1414$

Med_1 = Size = $\frac{N}{2}$ th item = $\frac{92}{2}$ = 46th item

Median lies in the class 40 -50.

$$\text{Med.} = L_1 + \frac{N/2 - C.f}{f} \times i$$

L_1 =40, $N/2$ = 46, C.f. = 40, f = 20, i = 10

$$\text{Med.} = 40 + \frac{46-40}{20} \times 10 = 40 + 3 = 43$$

$$\text{M.D.} = \frac{\sum f|D|}{N} = \frac{1414}{92} = 15.37$$

$$\text{Coeff. of MD} = \frac{MD}{Median} = \frac{15.37}{43} = 0.357$$

ਔਸਤ ਵਿਚਲਨ ਦੇ ਗੁਣ

1. ਇਸ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
2. ਇਹ ਲੜੀ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਮੱਦਾਂ ਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
3. ਪ੍ਰਮਾਪ ਵਿਚਲਨ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿਚ ਔਸਤ ਵਿਚਲਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਆਸਾਨ ਹੈ।

ਔਸਤ ਵਿਚਲਨ ਦੇ ਔਗੁਣ

1. ਔਸਤ ਵਿਚਲਨ ਵਿਚ ਚਿੰਨ੍ਹਾ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿਚ ਨਹੀ ਰੱਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਗਲਤ ਹੈ।
2. ਇਹ ਅੱਗੇ ਬੀਜ-ਗਣਿਤ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਯੋਗ ਨਹੀਂ।

10.3.5 ਪ੍ਰਮਾਪ ਵਿਚਲਨ (Standard Deviation)

ਪ੍ਰਮਾਪ ਵਿਚਲਨ ਖਿਲਾਰ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਿਧੀ ਹੈ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਦਾ ਵਿਚਾਰ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕਾਰਲ ਪੀਅਰਸਨ (Karl Pearson) ਨੇ 1893 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਸੀ। ਪ੍ਰਮਾਣ ਵਿਚਲਨ ਦਾ ਪਤਾ

ਕਰਨ ਲਈ ਵਰਗਮੂਲ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਨੂੰ ਤਟਸਥ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਵਰਗਮੂਲ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਉਲਟ ਕ੍ਰਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ Root-mean square deviation ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ ਵਿਚਲਨ ਵਰਗਾਂ ਦੀ ਔਸਤ ਲੈ ਕੇ ਉਸਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮਾਣ ਵਿਚਲਨ ਦਾ ਮਾਪ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਵਿਚੋਂ ਹੀ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਲਏ ਗਏ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੋਰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਔਸਤ ਵਿਚੋਂ ਲਏ ਗਏ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਤੋਂ ਨਿਊਨਤਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈਯ। ਇਸ ਲਈ ਗਰੀਕ ਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਅੱਖਰ ਸਿਗਮਾਂ σ ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$SD \text{ or } \sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(X-\overline{X}\right)^2}{N}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}} \quad \text{ਜਿਥੇ} \quad x = X - \overline{X}$$

σ ਪ੍ਰਮਾਪ ਵਿਚਲਨ ਹੈ, $N = \sum f$

ਪ੍ਰਮਾਪ ਵਿਚਲਨ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ (**Coefficient of Standard Deviation**)

$$\text{ਪ੍ਰਮਾਪ ਵਿਚਲਨ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ} = \frac{\sigma}{X} = \frac{\text{ਪ੍ਰਮਾਪ ਵਿਚਲਨ}}{\text{ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ}}$$

ਇਸ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦੋ ਲੜੀਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮਾਪ ਵਿਚਲਨ ਦੀ ਘਟਨਾ

(a) ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਸ਼੍ਰੇਣੀ

ਇਸ ਵਿਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਦਕ੍ਰਮ ਲਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ:-

(i) ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੀ ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ii) ਹਰ ਇਕ ਮੁੱਲ ਵਿਚੋਂ ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਨੂੰ ਘਟਾ ਕੇ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। $x = X - \overline{X}$

(iii) $SD \text{ or } \sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}$

ਉਦਾਹਰਣ 10 :

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਮਾਪ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

21, 17, 13, 25, 9, 19, 6, 10

ਹੱਲ : ਹੁਣ $\overline{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{120}{8} = 15$

X	x=X-15	x^2
21	+6	36
17	+2	4
13	-2	4

25	+10	100
9	-6	36
19	+4	16
6	-9	81
10	-5	25
$\sum X = 120$		$\sum x^2 = 302$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}} = \sqrt{\frac{302}{8}} = \sqrt{\frac{151}{4}} = \frac{12.28}{2} = 6.14$$

ਸੰਖੇਪ ਵਿਧੀ

ਜਦੋਂ ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਨਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪ੍ਰਮਾਣ ਵਿਚਲਨ ਦਾ ਪਤਾ ਸੰਖੇਪ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਦਕ੍ਰਮ ਲਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ:-

(i) ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇਕ ਨੂੰ ਕਲਪਿਤ ਔਸਤ (A) ਮੰਨ ਕੇ ਉਸ ਵਿਚ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ii) $\sum d_x, \sum d_x^2$ ਕੱਢੋ।

(iii) SD or $\sigma = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N} - \left(\frac{\left(\sum dx\right)}{N}\right)^2}$

ਉਦਾਹਰਣ 11 :

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਮਾਪ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

25, 27, 31, 32, 35

Let A = 31

X	$d_x = X - A$	dx^2
25	-6	36
27	-4	16
31	0	0
32	1	1
35	4	16
$\sum X = 150$	$\sum d_x = -5$	$\sum d_x^2 = 69$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N} - \left(\frac{\sum dx}{N}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{69}{5}-\left(\frac{-5}{5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{64}{5}}=\sqrt{12.8}=3.578$$

Coefficient of SD= $\frac{SD}{\overline{X}}=\frac{3.578}{30}=.119$

(b) ਖੰਡਿਤ ਸ੍ਰੇਣੀ (Discrete Series)

ਖੰਡਿਤ ਸ੍ਰੇਣੀ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਮਾਪ ਵਿਚਲਨ ਦੀ ਗਣਨਾ

(i) ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ :-

ਜੇਕਰ ਵਿਚਲਨ ਅਸਲ ਔਸਤ ਤੋਂ ਲਏ ਜਾਣ ਤਾਂ ਉਸ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ

$$\text{SD or } \sigma=\sqrt{\frac{\sum f\left(X-\overline{X}\right)^2}{N}} \text{ or } =\sqrt{\frac{\sum fx^2}{IV}}, \text{ ਜਿਥੇ } x=X-\overline{X}$$

(ii) ਸੰਖੇਪ ਵਿਧੀ

$$6=\sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}-\left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}, \text{ Where } d = X - A$$

(iii) **Step-Deviation Method**

$$6=\sqrt{\frac{\sum fd^{12}}{N}-\left(\frac{\sum fd^1}{N}\right)^2}\times C, \text{ Where } d^1=\frac{X-A}{C}$$

C = Common factor.

ਉਦਾਹਰਣ 12 :

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਮਾਪ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

X	45	50	55	60	65	70	75	80
f	3	5	8	7	9	7	4	7

x	f	X-60/5	fd^1	fd^{12}
45	3	-3	-9	27
50	5	-2	-10	20
55	8	-1	-8	8
60	7	0	0	0
65	9	1	9	9
70	7	2	14	28

75	4	3	13	36
80	7	4	28	112
		N=50	$\sum fd^{L} = 36$	$\sum fd^{12} = 240$

$$SD \text{ or } \sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N} - \frac{\left(\sum fd'^2\right)}{N}} \times C$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{240}{50} - \left(\frac{36}{50}\right)^2} \times 5 = \sqrt{4.8 - .5184} \times 5 = 10.35$$

(c) ਅਖੰਡਿਤ ਲੜੀ

ਅਖੰਡਿਤ ਲੜੀ ਵਿੱਚ SD ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਉਪਰ ਖੰਡਿਤ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਤਰੀਕੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 :

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ SD or σ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।

X :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
f :	1	4	17	45	26	5	2

ਹੱਲ

X	m	f	fm	d = m-A A=35	d'	fd	fd' $fd' = \frac{fd}{10}$	fd'^2
0-10	5	1	5	-30	-3	-30	-3	9
10-20	15	4	60	-20	-2	-80	-8	16
20-30	25	17	425	-10	-1	-170	-17	17
30-40	35	45	1575	0	0	0	0	0
40-50	45	26	1170	10	1	260	26	26
50-60	55	5	275	20	2	100	10	20
60-70	65	2	130	30	3	60	6	18
		N=100				$\sum fd = 140$		$\sum fd'^2 = 10600$

$$6 = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N} - \frac{\left(\sum fd\ \right)^2}{N}} = \sqrt{\frac{10600}{100} - \left(\frac{140}{100}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{10600 - 196}{100}} = \sqrt{104.04} = 10.2$$

10.4 ਸਾਰਾਂਸ਼

ਇਸ ਪਾਠ ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਖਿਲਾਰ ਦਾ ਅਰਥ ਅਤੇ ਖਿਲਾਰ ਨੂੰ ਮਾਪਨ ਦੇ ਵੱਖ ਵੱਖ ਤਰੀਕਿਆਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਹੈ।ਰੇਂਜ, ਅੰਤਰ-ਕੁਆਰਟਾਈਲ ਰੇਂਜ, ਅਰਧ-ਅੰਤਰ ਕੁਆਰਟਾਈਲ ਰੇਂਜ, ਔਸਤ ਵਿਚਲਨ, ਅਤੇ ਪ੍ਰਮਾਪ ਵਿਚਲਨ ਆਦਿ ਮੁੱਖ ਵਿਧੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨਾਲ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਹਰ ਇਕ ਵਿੱਧੀ ਦੇ ਗੁਣ ਅਤੇ ਔਗੁਣਾਂ ਬਾਰੇ ਵੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

10.5 ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਛੋਟੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਪ੍ਰਮਾਪ ਵਿਚਲਨ ਦੀ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾ ਦਿਉ।
2. ਔਸਤ ਵਿਚਲਨ ਦੇ ਔਗੁਣ ਦੱਸੋ।
3. ਰੇਂਜ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ।
4. ਖਿਲਾਰ ਦੇ ਚੰਗੇ ਮਾਪ ਦੀਆਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ।
5. ਖਿਲਾਰ ਦੇ ਅਸੀਮ ਮਾਪ ਅਤੇ ਤੁਲਨਾਤਮਕ ਮਾਪ ਵਿਚ ਅੰਤਰ ਦੱਸੋ।

ਲੰਮੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. Calculate the standard deviation for the following data :

X :	50	60	70	80	90	100	110	120
f :	14	40	54	46	26	12	6	2

2. Find standard deviation of 64, 68, 72, 76, 80, 84
3. Calculate Mean Deviation from Orithmetic Mean and also calculate its coefficient.

   7 4 10 9 15 12 7 9 7

4 Calculate Mean Deviation and its coefficient from the following data.

Class:	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
f :	5	8	12	15	20	14	12	6

10.6 ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

S.P. Gupta : Statistical Methods
S.C.Gupta : Fundamentals of Statistics

ਪਾਠ ਨੰ: 1.11 ਲੇਖਿਕਾ :ਡਾ. ਵਿਪਲਾ ਚੋਪੜਾ

ਬਿਖਮਤਾ (Skewness)

ਰੂਪ-ਰੇਖਾ (Structure)

11.0 ਭੂਮਿਕਾ
11.1 ਮੰਤਵ
11.2 ਬਿਖਮਤਾ ਦਾ ਅਰਥ
11.3 ਬਿਖਮਤਾ ਦੇ ਮਾਪ
11.3.1 ਬਿਖਮਤਾ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਪ
11.3.2 ਬਿਖਮਤਾ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਮਾਪ
11.4 ਬਿਖਮਤਾ ਨੂੰ ਮਾਪਨ ਦੇ ਤਰੀਕੇ
11.4.1 ਕਾਰਲ ਪੀਅਰਸਨ
11.4.2 ਬਾਉਲੇ
11.4.3 ਕੈਲੇ
11.5 ਸਾਰਾਂਸ਼
11.6 ਪ੍ਰਸ਼ਨ
11.7 ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

11.0 ਭੂਮਿਕਾ :

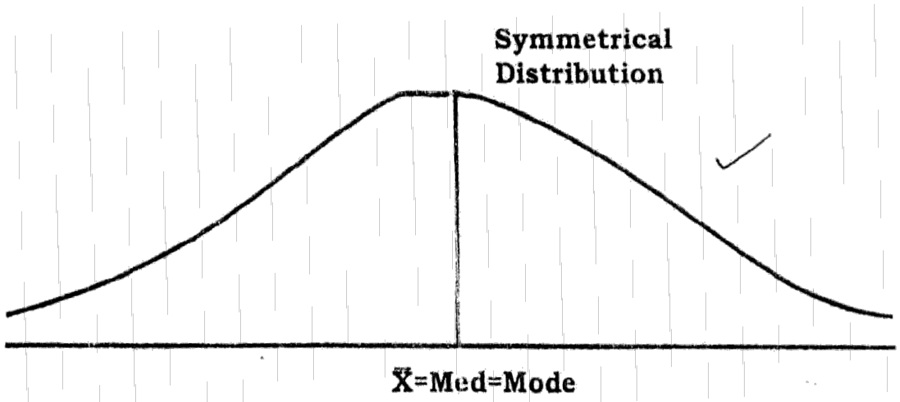
ਪਿਛਲੇ ਪਾਠਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ ਅਤੇ ਖਿਲਾਰ ਦੇ ਮਾਪ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਿੱਤੀ ਸੀ। ਇਹ ਮਾਪ ਸਾਨੂੰ ਖਿਲਾਰ ਦੇ ਸਰੂਪ ਬਾਰੇ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਦੱਸਦਾ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਇਹ ਨਹੀਂ ਪਤਾ ਲਗਦਾ ਕਿ ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ (Arithmetic Mean) ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਸਮ-ਮਾਪੀ (Symmetrical) ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਇਸ ਪਾਠ ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਵੰਡ ਦੇ ਸਰੂਪ ਨੂੰ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਲਈ ਬਿਖਮਤਾ (Skewness) ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਕੁਰਟੋਸਿਸ (Kurtosis) ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇਵਾਂਗੇ ਜਿਹੜਾ ਕਿਸੇ ਦੀ ਸਮਰੂਪੀ ਵਕਰ ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ ਉਚਾਈ ਨੂੰ ਮਾਪਦਾ ਹੈ।

11.1 ਮੰਤਵ :

ਪਿਛਲੇ ਪਾਠ ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਖਿਲਾਰ ਦੇ ਮਾਪ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਸੀ ਜਿਹੜਾ ਖਿਲਾਰ ਦੀ ਨਾਲ ਸਬੰਧਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦਕਿ ਬਿਖਮਤਾ ਦਾ ਸਬੰਧ ਵਿਚਰਣ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।ਇਸ ਪਾਠ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੰਤਵ ਬਿਖਮਤਾ ਅਤੇ ਕੁਰਟੋਸਿਸ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਹੈ।

11.2 ਬਿਖਮਤਾ ਦਾ ਅਰਥ

ਬਿਖਮਤਾ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ ਵੰਡ ਸਮ-ਮਾਪੀ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, ਬਿਖਮਤਾ ਸਾਨੂੰ ਦੱਸਦੀ ਹੈ ਕਿ ਸਮਰੂਪੀ ਵੰਡ ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ ਉਸ ਵੰਡ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਤਨੀ ਬਿਖਮਤਾ ਪਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਸਮਰੂਪੀ ਵੰਡ ਵਿੱਚ ਕੇਂਦਰੀ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਇਕਸਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਵਿਚ ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ, ਮਾਧਿਕਾ ਅਤੇ ਬਹੁਲਕ ਦਾ ਮੁਲ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ ਨੰ. 1) ਇਸ ਲਈ ਅਜਿਹੀ ਵੰਡ ਵਿੱਚ ਬਿਖਮਤਾ ਸਿਫਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

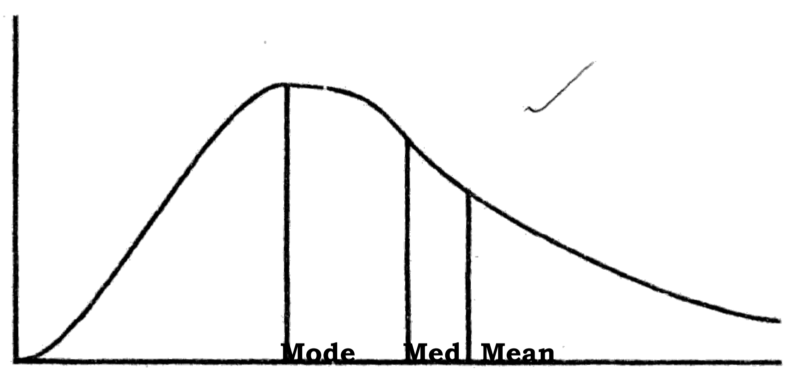


ਚਿੱਤਰ ਨੰ. 1

ਬਿਖਮਤਾ (Skewness) ਇਕਸਾਰਤਾ (Homogenity) ਜਾਂ ਸਮਤਾ ਦੀ ਘਾਟ ਪ੍ਰਗਟਾਉਂਦਾ ਹੈ। According to Croxton and Cowden - When a series is not symmetrical, it is said to be asymmetrical or Skewed.

ਸਾਕਾਰਾਤਮਕ ਬਿਖਮ (Positively Skewed) : ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਵੰਡ ਵਿਚ ਕੁਝ ਰਕਮਾਂ ਬਹੁਤ ਹੀ ਵੱਡੀਆਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਸ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ਗੁਣਿਤਕ ਔਸਤ (Arithmetic Mean), ਮਾਧਿਕਾ ਅਤੇ ਮੋਡ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਤੋਂ ਹਮੇਸ਼ਾ ਜਿਆਦਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਜਿਹੀ ਵੰਡ ਦੇ ਵਕ੍ਰ ਦਾ ਜ਼ਿਆਦਾ ਝੁਕਾਉ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵੱਲ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਨੂੰ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਬਿਖਮ (Positively skewed) ਆਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ ਨੰ. 2) ਇਸ ਵਿੱਚ

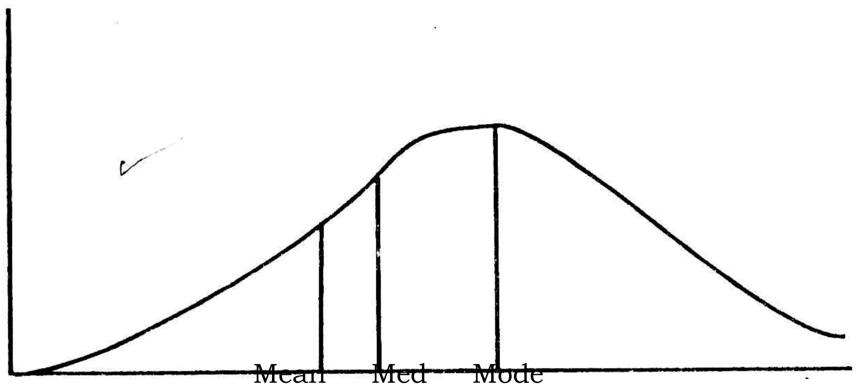
Mode < Median < Mean



ਚਿੱਤਰ ਨੰ. 2

ਰਿਣਾਤਮਕ ਬਿਖਮ (Negatively Skewed) : ਜੇਕਰ ਵੰਡ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਰਕਮਾਂ ਬਹੁਤ ਛੋਟੀਆਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ, ਮਾਧਿਕਾ ਅਤੇ ਮੋਡ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ ਹਮੇਸ਼ਾ ਘੱਟ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਦੇ ਵਕ੍ਰ ਦਾ ਝੁਕਾਉ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਵੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅਜਿਹੀ ਵੰਡ ਨੂੰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਬਿਖਮ ਆਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ ਨੰ. 3)

Mode > Med > $\overline{X}$



11.3 ਬਿਖਮਤਾ ਦੇ ਮਾਪ (**Measurement of Skewness**):

ਬਿਖਮਤਾ ਨੂੰ ਦੋ ਵਿਧੀਆਂ ਨਾਲ ਮਾਪ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

11.3.1 ਬਿਖਮਤਾ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਪ (**Absolute Measures of Skewness**)

ਬਿਖਮਤਾ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ (absolute) ਅਤੇ ਸਾਪੇਖ (relative) ਮਾਪ ਹਨ। ਨਿਰਪੇਖ ਪੱਖ ਤੋਂ ਬਿਖਮਤਾ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਾਪਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਬਿਖਮਤਾ = ਔਸਤ – ਮੋਡ

(Skewness = Mean - Mode)

ਜੇਕਰ ਔਸਤ ਦਾ ਮੁੱਲ ਮੋਡ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ ਤਾਂ ਬਿਖਮਤਾ ਸਕਾਰਾਤਮਕ (Positive) ਹੋਵੇਗੀ। ਜੇਕਰ ਮੋਡ ਦਾ ਮੁੱਲ ਔਸਤ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ ਤਾਂ ਬਿਖਮਤਾ ਰਿਣਾਤਮਕ (negative) ਹੋਵੇਗੀ।

11.4 ਬਿਖਮਤਾ ਨੂੰ ਮਾਪਨ ਦੇ ਤਰੀਕੇ :

ਬਿਖਮਤਾ ਨੂੰ ਮਾਪਨ ਲਈ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਚਾਰ ਤਰੀਕੇ ਹਨ :

1. ਕਾਰਲ ਪੀਅਰਸਨ ਦਾ ਬਿਖਮਤਾ ਦਾ ਮਾਪ
2. ਬਾਉਲੇ ਦਾ ਬਿਖਮਤਾ ਦਾ ਮਾਪ
3. ਕੈਲੇ ਦਾ ਬਿਖਮਤਾ ਦਾ ਮਾਪ

11.4.1 ਕਾਰਲ ਪੀਅਰਸਨ ਦਾ ਬਿਖਮਤਾ ਦਾ ਮਾਪ

ਕਾਰਲ ਪੀਅਰਸਨ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਪ ਦਾ ਸੂਤਰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ

Skewness = Mean - Mode

ਇਹ ਮਾਪ ਨਿਰਪੇਖ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਮਾਪ ਮੁੱਲਾਂ ਦੀਆਂ ਮੂਲ ਇਕਾਈਆਂ (original units) ਵਿੱਚ ਹੀ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਕਾਰਲ ਪੀਅਰਸਨ ਦੇ ਬਿਖਮਤਾ ਦੇ ਸਾਪੇਖ (relative) ਮਾਪ ਨੂੰ ਬਿਖਮਤਾ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਮੁੱਲਾਂ ਦੀਆਂ ਮੂਲ ਇਕਾਈਆਂ ਤੋਂ ਮੁਕਤ (independent) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਾਰਲ ਪੀਅਰਸਨ ਦੇ ਬਿਖਮਤਾ ਦਾ ਸੂਤਰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

$$Sk_p = \text{Karl Pearson's coefficient of Skewness} = \frac{\text{Mean} - \text{Mode}}{\text{Standard Deviation}}$$

ਕਾਰਲ ਪੀਅਰਸਨ ਦਾ ਬਿਖਮਤਾ ਮਾਪਣ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਸਭ ਤੋਂ ਅੱਛਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਅਤੇ Standard deviation ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ।

ਕਾਰਲ ਪੀਅਰਸਨ ਦਾ ਬਿਖਮਤਾ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ±1 ਵਿਚਕਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਜਦੋਂ $SK_p = 0 \Rightarrow$ ਬਿਖਮਤਾ ਦਾ ਅਣਹੋਂਦ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
i.e. ਵੰਡ ਸਮਰੂਪੀ ਹੈ।

$SK_p < 0 \Rightarrow$ ਤਾਂ ਵੰਡ ਦੀ ਬਿਖਮਤਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਅਜਿਹੀ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਅਧਿੱਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਥੱਲੇ ਪਾਸੇ ਵੱਲ ਝੁਕੀ ਹੋਈ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

$SK_p > 0 \Rightarrow$ ਤਾਂ ਵੰਡ ਦੀ ਬਿਖਮਤਾ ਵੀ ਸਕਾਰਾਤਮਕ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।ਅਜਿਹੀ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਪਾਸੇ ਵੱਲ ਝੁਕੀ ਹੋਈ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਇਸ ਸੂਤਰ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਵੰਡ ਵਿੱਚ ਬਿਖਮਤਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਵਿਸਤਾਰ ਦਾ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ।

ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਸੂਚੀ (Individual Observation) :

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਕਾਰਲ ਪੀਅਰਸਨ ਦੇ ਬਿਖਮਤਾ ਗੁਣਾਂਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

Marks 1 4 4 5 6

Marks	dx $(X-\overline{X})$	dx^2
1	-3	9
4	0	0
4	0	0
5	1	1
6	2	4
$\sum X = 20$		$\sum dx^2 = 14$

$$\overline{X} = \frac{20}{5} = 4$$

Mode = 4

$$\text{S.D. or } \sigma = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N}} = \sqrt{\frac{14}{5}} = \sqrt{2.8} = 1.67$$

$$\text{Co-efficient of Skewness} = \frac{\overline{X} - \text{Mode}}{\sigma} = \frac{4-4}{1.67} = 0$$

ਖੰਡਿਤ ਲੜੀ (Discrete Series)

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਕਾਰਲ ਪੀਅਰਸਨ ਦਾ ਬਿਖਮਤਾ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

X :	12.5	17.5	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5	47.5
f :	28	42	54	108	129	61	45	33

ਹੱਲ :

X	f	x – 27.5 / 5 d"	fd'	fd'2
12.5	28	-3	-84	256
17.5	42	-2	-84	168
22.5	54	-1	-54	54
27.5	108	0	0	0
32.5	129	1	129	129
37.5	61	2	122	244
42.5	45	3	135	405
47.5	33	4	132	528
	N=500		$\sum fd = 296$	$\sum fd^2 = 1780$

Coefficient of Skewness $= \frac{\text{Mean} - \text{Mode}}{\sigma}$

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd}{N}, \times i = 27.5 + \frac{296}{500} \times 5 = 30.46$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f d'^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma f d'}{\Sigma f}\right)} \times i$$

$$= \sqrt{\frac{1780}{500} - \left(\frac{295}{500}\right)}$$

$$\sigma = 1.79$$

$$\text{coeff of SK} = \frac{\sigma}{\overline{X}} = \frac{1.79}{30.46} = 0.059$$

ਅਖੰਡਿਤ ਲੜੀ (Continuous Series)

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਕਾਰਲ ਪੀਅਰਸਨ ਦਾ ਬਿਖਮਤਾ ਦਾ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ।

X :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
f :	5	6	11	21	35	30	22	11

ਹੱਲ :

X	f	$d = \frac{m-35}{10}$	fd	fd^2
0-10	5	-3	-15	45
10-20	6	-2	-12	24
20-30	11	-1	-11	11

30-40	21	0	0	0
40-50	35	1	35	35
50-60	'30	2	60	120
60-70	22	3	66	198
70-80	11	4	44	176
	N=141		$\sum fd = 167$	$\sum fd^2 = 609$

$$\text{Co eff. of SK} = \frac{\text{Mean} - \text{Mode}}{\sigma}$$

$$\text{Mean : } \overline{X} = A + \frac{\sum fd}{N} \times i$$

$$\overline{X} = 35 + \frac{167}{141} \times 10 = 35 + 11.84 = 46.84$$

Mode : By inspection mode lies in the class 40-50

$$\text{Mode } = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

$$= 40 + \frac{35-21}{(35-21)+(35-30)} \times 10$$

$$= 40 + \frac{14}{14+5} \times 10 = 40 + 7.37 = 47.37$$

$$\text{SD i.e. } \sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2} \times i$$

$$= \sqrt{\frac{609}{141} - \left(\frac{167}{141}\right)^2} \times 10 = \sqrt{4.319 - 1.402} \times 10$$

$$= 1.708 \times 10 = 17.08, \text{ Coefficient of SK } = \frac{46.84 - 47.37}{17.08}$$

$= - 0.031$

11.4.2 ਬਾਉਲੇ ਦਾ ਬਿਖਮਤਾ ਦਾ ਮਾਪ :

ਬਾਉਲੇ ਦਾ ਬਿਖਮਤਾ ਦਾ ਮਾਪ ਮਾਧਿਕਾ (Median) ਅਤੇ ਚਤੁਰਥਕ (Quartiles) ਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਹੈ। Bowley's Absolute Measure of Skewness

$= (Q_3 - \text{Med.}) - (\text{Med.} - Q_1)$

$= Q_3 + Q_1 - 2\text{Med.}$

ਬਿਖਮਤਾ ਦਾ ਇਹ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਪ ਹੈ।

Relative Measure (ਸਾਪੇਖ ਮਾਪ) :

Bowley's Coefficient of Skewness i.e.

$$SK_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2\,Med.}{Q_3 - Q_1}$$

ਇਸ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ±1 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਸਮਰੂਪੀ ਵੰਡ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਬਾਉਲੇ ਦਾ ਬਿਖਮਤਾ ਦਾ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ।

X :	7	8	9	10	11	12	13	14
f :	8	20	35	40	32	25	18	22

ਹੱਲ :

X	f	c.f.
7	8	8
8	20	28
9	35	63
10	40	103
11	32	135
12	25	160
13	18	178
14	22	200

$$\text{Coefficient of } SK_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2\,Med.}{Q_3 - Q_1}$$

Q_1 = Size of the $\left(\frac{N+1}{4}\right)^{th}$ item

= Size of $\left(\frac{200+1}{4}\right)$ item = 50.25^{th} item = 9

Q_3 = Size of the $3\left(\frac{N+1}{4}\right)^{th}$ item = $3\left(\frac{200+1}{4}\right)^{th}$ item

= 150.75th item = 12

Median = Size of the $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ item

= Size of $\left(\frac{200+1}{2}\right)$ item.

= 100.5^{th} item = 10

$$\text{Coefficient of SK} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2\,\text{Med.}}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{12+9-2\times10}{12-9} = \frac{21-20}{3} = \frac{1}{3} = 0.33$$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : Calculate coefficient of Skewness based on quartiles and median from the following data:

Variable :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
frequency :	12	16	26	38	22	15	7	4

ਹੱਲ : $SK_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2\,\text{Med.}}{Q_3 - Q_1}$

Variable	f	C.f.
0-10	12	12
10-20	16	28
20-30	26	54
30-40	38	92
40-50	22	114
50-60	15	129
60-70	7	136
70-80	4	140

$Q_1 = \text{Size of } \frac{N}{4}^{th} \text{ item}$

$= \frac{140}{4} = 35^{th}$ item

It lies in the class 20-30

$$Q_1 = L_1 + \frac{N/4 - C.f}{f} \times i$$

$L_1 = 20$, $N/4 = 35$, C.f. = 28, f = 26, i = 10.

$$Q_1 = 20 + \frac{35-28}{26} \times 10 = 20 + 2.69$$

$= 22.69$

$$Q_3 = \text{Size of } \frac{3N}{4}^{th} \text{ item} = \frac{3\times140}{4} = 105^{th} \text{ item}$$

It lies in the class 40-50

$$Q_3 = L_1 + \frac{3N/4 - C.f}{f} \times i$$

$$Q_3 = 40 + \frac{105-92}{22} \times 10 = 45.91$$

$$\text{Med.} = \text{Size of } \frac{N}{2}^{th} \text{ item} = \frac{140}{2} = 70^{th} \text{ item}$$

It lies in the class 30-40

$$\text{Med.} = L_1 + \frac{N/2 - C.f}{f} \times i$$

$$= 30 + \frac{70-54}{38} \times 10 = 30 + 4.21 = 34.21$$

$$\text{Coeff. of SK} = \frac{45.91 + 22.69 - 2(34.21)}{45.91 - 22.69}$$

$$= \frac{68.6 - 68.42}{23.22} = 0.008$$

11.4.3 ਕੈਲੇ ਦਾ ਬਿਖਮਤਾ ਦਾ ਮਾਪ (**Kelly's coefficient of Skewness**):

ਕੈਲੇ ਦੇ ਬਿਖਮਤਾ ਦੇ ਮਾਪ ਵਿਚ Quartiles ਦੀ ਜਗ੍ਹਾਂ Percentiles ਜਾਂ Deciles ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਪ ਇਸ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਪ ਅਨੁਸਾਰ

$$\text{Skewness} = P_{10} + P_{90} - 2\,\text{Med.}$$

ਜਾਂ

$$\text{Skewness} = D_9 + D_1 - 2\,\text{Med.}$$

ਸਾਪੇਖ ਮਾਪ

$$\text{Coefficient of } SK_K = \frac{P_{10} + P_{90} - 2\,\text{Med}}{P_{90} - P_{10}}$$

ਜਾਂ

$$SK_K = \frac{D_1 + D_9 - 2\,\text{Med}}{D_9 - P_1}$$

ਇਨ੍ਹਾਂ ਸੂਤਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਮੁੱਲ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ $\pm$ ਵਿਚਕਾਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : Compute Kelly's Coefficient of Skewness.

X:	4	8	12	16	20	24	28	32
f:	4	9	17	40	53	37	24	16

ਹੱਲ :

X		f		C.f
4	---	4	---	4
8	---	9	---	13
12	---	17	---	30
16	---	40	---	70
20	---	53	---	123
24	---	37	---	160
28	---	24	---	184
32	---	16	---	200

$$D_9 = \text{Size of } \frac{9(200+1)^{th}}{100} \text{ item} = 180.9^{th} \text{ item} = 28$$

$$D_{90} = \text{Size of } \frac{90(200+1)^{th}}{100} \text{ item} = 180.9^{th} \text{ item} = 28$$

$$D_1 = P_{10} = \text{Size of } \frac{10(200+1)^{th}}{100} \text{ item= size of } 20.1^{th} \text{ item} = 12$$

$$\text{Median} = \text{Size of } \frac{200+1^{th}}{2} \text{ item} = 101.5^{th} \text{ item} = 20$$

$$\text{Coefficient of SK} = \frac{D_1 + D_9 - 2\,\text{Med}}{D_9 - D_1}$$

$$= \frac{12+28-2\times 20}{28-12} = \frac{40-40}{16} = 0$$

This series is evenly distributed with no Skewness

11.5 ਸਾਰਾਂਸ਼

ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਬਿਖਮਤਾ ਦਾ ਅਰਥ ਅਤੇ ਬਿਖਮਤਾ ਨੂੰ ਮਾਪਨ ਦੇ ਤਿੰਨ ਤਰੀਕਿਆ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ। ਕਾਰਲ ਪੀਅਰਸਨ,ਬਾਉਲੇ ਅਤੇ ਕੈਲੇ ਦੇ ਬਿਖਮਤਾ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਦੇ ਤਰੀਕਿਆ ਵਿਚੋਂ ਕਾਰਲ ਪੀਅਰਸਨ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ। ਬਿਖਮਤਾ (Skewness) ਸਾਨੂੰ ਵੰਡ ਦੇ ਸਰੂਪ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

11.6 ਪ੍ਰਸ਼ਨ

11.6.1 ਛੋਟੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਬਿਖਮਤਾ ਕੀ ਹੈ?
2. ਬਿਖਮਤਾ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਅਤੇ ਸਾਪੇਖ ਮਾਪ ਵਿੱਚ ਕੀ ਅੰਤਰ ਹੈ?

11.6.2 ਲੰਮੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆ ਤੋਂ **Kell's coeffiient of skewness** ਪਤਾ ਕਰੋ।

Marks:	0-20	20-40	40-60	60-80	80-10
No. of Students :	8	12	20	6	4

2. Calculate Bowley's coefficient of Skewness from the following data :

Mid points :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frequency	2	9	11	14	20	24	20	16	5	2

3. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਕਾਰਲ ਪੀਅਰਸਨ ਦਾ ਬਿਖਮਤਾ ਦਾ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ।

Age	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
No. of Persons.	8	12	20	25	15	12	8

4. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ **Karl Pearson's coeffiient of skewness** ਪਤਾ ਕਰੋ।

Daily Wages :	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170
Nol of Workers:	1	3	7	20	12	4	3

11.7 ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

S.P. Gupta : Statistical Methods

S.C.Srivastava
and Smt. S. Srivastava : Quantitative Techniques.

Type Setting :
Department of Distance Education, Punjabi University, Patiala.

ਡਿਸਟੈਂਸ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ ਵਿਭਾਗ,
ਪੰਜਾਬੀ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਪਟਿਆਲਾ
ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਉੱਤਰ-ਪੱਤਰ

ਰੋਲ ਨੰ: ....

ਬੀ.ਏ. ਭਾਗ ਤੀਜਾ (ਸਮੈਸਟਰ-ਛੇਵਾਂ) **ਅਰਥ-ਵਿਗਿਆਨ – ਪਰਚਾ ਦੂਜਾ**

ਪਾਠ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਮਿਤੀ ....

ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੁਆਰਾ ਉੱਤਰ-ਪੱਤਰ ਭੇਜਣ ਦੀ ਮਿਤੀ...

ਨੱਥੀ ਕੀਤੇ ਪੰਨਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ.................

ਵਿਭਾਗ ਵਿੱਚ ਪਹੁੰਚਣ ਦੀ ਮਿਤੀ ....

ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਅੰਕ...................................

ਅਧਿਆਪਕ ਦੇ ਹਸਤਾਖਰ ਅਤੇ ਮਿਤੀ ....

ਹੇਠਾਂ ਆਪਣਾ ਨਾਂ ਅਤੇ ਪੂਰਾ ਪਤਾ ਸਾਫ-ਸਾਫ ਲਿਖੋ:

....

....

....

....

ਸਮਾਂ : 1 ਘੰਟਾ 15 ਮਿੰਟ ਕੁੱਲ ਅੰਕ : **25 Marks**

ਵੱਡੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ : ਕੋਈ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਕਰੋ।

1. If the demand curve is $x = \frac{q}{\sqrt{P}}$ show that the price elasticity of demand is constant and equal to $-\frac{1}{2}$.

2. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ ਕੱਢੋ।

$$y = (x-3)^5 (x+1)^4$$

3. Calculate Arithmetic Mean from the following:

Marks	No. of Students	Marks	No. of Students
Marks below10	15	Marks below 50	96
,, ,, 20	35	,, ,, 60	127
,, ,, 30	60	,, ,, 70	198
,, ,, 40	84	,, ,, 80	250

4. The following are the scores of two batsman A and B in a series of innings:

A:	12	115	6	73	7	19	119	36	84	29
B:	47	12	76	42	4	51	37	48	13	0

(i) Who is better run getter ?

(ii) Who is a more consistent player ? (1x15=15 Marks)

ਛੋਟੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ : ਕੋਈ ਪੰਜ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਕਰੋ।

1. ਸਮਾਨ ਸਮੂਹ ਅਤੇ ਭੁਲ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਫਰਕ ਦੱਸੋ।
2. ਲਾਗਤ ਫਲਨ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ।
3. ਐਕਸਪੋਨੇਸ਼ੀਅਲ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਿਉ।
4. ਮਿਨੀਮੈਮ ਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿਹੜੀਆਂ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਹਨ।
5. ਜੇਕਰ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ $R = 14x-x^2$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਔਸਤ ਆਮਦਨ ਅਤੇ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਵਿਪਰੀਤ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ?
7. ਨਿਰਧਾਰਕ ਦੇ ਦੋ ਗੁਣ ਦੱਸੋ।
8. ਗਣਿਤਕ ਔਸਤ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ।
9. ਖਿਲਾਰ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਿਉ।
10. ਬਿਖਮਤਾ ਕੀ ਹੈ। (5x2=10 Marks)

ਉਤੱਰ-ਪੱਤਰ ਪੂਰਾ ਹੋ ਜਾਣ ਉਪਰੰਤ ਇਸ ਪਤੇ ਤੇ ਭੇਜਿਆ ਜਾਵੇ: ਡਿਪਟੀ ਰਜਿਸਟਰਾਰ, ਡਿਸਟੈਂਸ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ ਵਿਭਾਗ, ਪੰਜਾਬੀ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਪਟਿਆਲਾ–147002.